

**Prova Finale di Tipo B**  
**14 Febbraio 2020**

**Corso di Laurea in Matematica**

**Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre**

**U. Bessi, A. Bruno, A. Giuliani. F. Tartarone**

**Istruzioni**

- (a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
- (b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
- (c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.



---

---

## GRUPPO 1 (Analisi)

---

---

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} |z| = |w| \\ z^2 + w^2 = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

nelle incognite  $z, w \in \mathbb{C}$ .

---

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

1) (7 punti) Mostrare che la serie

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$$

è convergente.

2) (8 punti) Ricordando che

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

calcolare la somma della serie del punto 1).

---

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Sia  $a \in \mathbb{R}$  fissato con  $a > 0$ . Si consideri l'equazione nella variabile  $x$

$$\frac{1}{1+x^{10}} = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}}.$$

1) (5 punti) Usando la monotonia della funzione integranda, dimostrare che, per ogni  $a > 0$ ,

$$\frac{1}{1+a^{10}} < \frac{1}{a} \int_0^a \frac{dt}{1+t^{10}} < 1.$$

2) (5 punti) Dimostrare che l'equazione del punto 1 ammette una e una sola soluzione positiva  $x_a$ ; inoltre,  $x_a \in (0, a)$ .

2) (5 punti) Sia  $x_a$  come nel punto precedente. Calcolare

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} x_a \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{x_a}{a}.$$

---

**ESERCIZIO 1.4** (15 punti)

Un punto materiale di massa  $m > 0$  è vincolato a muoversi su un piano verticale, lungo una guida di equazione  $y = x^2/\ell$ , con  $\ell > 0$  (si assuma che l'asse  $y$  è verticale e orientato verso l'alto). Il punto è soggetto alla forza di gravità e a una forza di richiamo elastica di costante  $k > 0$  verso il punto  $(0, \ell)$ , prodotta da una molla di lunghezza a riposo nulla.

1) Scegliendo le ascisse dei punti come coordinate generalizzate si scriva la Lagrangiana del sistema. 2) Si scriva l'equazione di Eulero-Lagrange. 3) Si identifichi una grandezza conservata e si discuta come risolvere il sistema per quadrature. 4) Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare di  $k$ . Per  $k > 2mg/\ell$ , si scelga un punto di equilibrio stabile e si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno ad esso.

---

**ESERCIZIO 1.5** (25 punti)

Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) (10 punti) Dimostrare che  $f$  si prolunga per continuità in  $(0, 0)$ .

2) (15 punti) Ricordando il teorema del differenziale totale, dimostrare che  $f$  così prolungata è differenziabile in  $(0, 0)$ .

---

**ESERCIZIO 1.6** (25 punti) **Dissertazione teorica.**

1) (10 punti) Sia dia la definizione di derivata per una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

2) (8 punti) Consideriamo una funzione  $f: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ ; in altre parole, supponiamo di avere  $f(x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che  $f$  sia lineare in ciascuna delle variabili  $x_i$ ; ad

esempio,

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2, x_2, \dots, x_n) = \alpha f(v_1, x_2, \dots, x_n) + \beta f(v_2, x_2, \dots, x_n).$$

Si indichi con  $Df(x_1, \dots, x_n)$  la derivata di  $f$  nel punto  $(x_1, \dots, x_n)$  e si dimostri che

$$Df(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f(x_1, \dots, x_{n-1}, h_n).$$

3) (7 punti) Si consideri la funzione  $f: (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det(x_1, \dots, x_n)$$

dove  $\det$  indica il determinante; abbiamo adottato la convenzione che i vettori di  $\mathbb{R}^n$  sono vettori colonna, quindi  $(x_1, \dots, x_n)$  è una matrice quadrata  $n \times n$ .

Se  $e_1, \dots, e_n$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^n$ , si dimostri, usando il punto 2), che

$$Df(e_1, \dots, e_n)(h_1, \dots, h_n) = \text{tr}(h_1, \dots, h_n)$$

dove  $\text{tr}$  indica la traccia di una matrice quadrata; notate che con le convenzioni del punto precedente  $(e_1, \dots, e_n)$  è la matrice identica su  $\mathbb{R}^n$ .

---

---

## GRUPPO 2 (Geometria)

---

---

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)

- 1) Stabilire se il polinomio  $f(X) = X^4 + 2X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$  è irriducibile.
- 2) Sia  $\mathbb{Z}_3[\alpha] = \mathbb{Z}_3[X]/(f(X))$  dove  $\alpha = \bar{X}$  nel quoziente dato. Stabilire se l'elemento  $\alpha^3 - \alpha^2 + 1$  è invertibile in  $\mathbb{Z}_3[\alpha]$  e se lo è calcolarne l'inverso.
- 3) Trovare, se esistono, i divisori dello zero in  $\mathbb{Z}_3[\alpha]$ .

---

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)

Sia  $A$  la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Calcolare  $A^8$ .

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)

Sia  $W = \langle p, q, r \rangle$  il sottospazio vettoriale dello spazio  $\mathbb{R}_4[T]$  dei polinomi di grado al più 4 generato dai polinomi:

$$p(T) = 1 - T^3, \quad q(T) = T^2 - 1, \quad r(T) = T^2 - k$$

Si determini la dimensione di  $W$  e una sua base al variare del parametro  $k \in \mathbb{R}$ .

---

ESERCIZIO 2.4 (25 punti)

Nello spazio  $\mathbb{R}^3$  discutere, al variare dei parametri  $h$  e  $k \in \mathbb{R}$ , la posizione reciproca dei tre piani:

$$\pi_1 : X - 2Y + hZ = 1,$$

$$\pi_2 : 2X - 4Y - kZ = 2,$$

$$\pi_3 : (h - k)X + (k - 4)Y - (h + 2k)Z = 4 - h.$$

---

ESERCIZIO 2.5 (15 punti) Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$Y^2 - XY + 1 = 0$$

---

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)

**Dissertazione teorica.**

Dimostrare la formula di Grassmann, secondo cui se  $S$  e  $T$  sono due sottospazi di uno spazio vettoriale  $V$  di dimensione finita allora

$$\dim(S \cap T) + \dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T)$$

---