Prova Finale di Tipo B
14 Settembre 2018

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, S. Gabelli, A. Giuliani

<u>Istruzioni</u>

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

<u>Esercizio 1.1</u> (15 punti)
Si consideri il sistema meccanico bidimensionale

$$\ddot{\mathbf{x}} = (|\mathbf{x}|^2 - 1)\mathbf{x},$$

per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

i) Si identifichino i due integrali primi del moto, corrispondenti all'energia meccanica e al momento angolare del sistema.

ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

iii) Si descriva il moto in coordinate polari ρ, θ e si scriva l'equazione del moto per la variabile radiale. Si discuta la natura qualitativa del moto radiale al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi ridotto $(\rho, \dot{\rho})$ ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è limitato o illimitato.

iv) Si esibisca un dato iniziale per cui il moto è periodico non banale (i.e., per cui $\mathbf{x}(t)$ è periodico ma non costante in t) e se ne calcoli il periodo (eventualmente in termini di un integrale definito).

<u>Esercizio 1.2</u> (15 punti)
1) (7 punti) Si consideri la serie seguente:

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x)$$

dove

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n} e^{-x\sqrt{n^2+n}}.$$

Dimostrare che la serie converge per $x > \alpha$, dove α è un numero negativo. Potrebbe essere utile trattare separatamente i casi $x \in [0, 1)$, $x \geq 1$ e $x < 0$.
2) (8 punti) Dimostrare che la serie converge uniformemente in $[\alpha + \varepsilon, +\infty)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

<u>Esercizio 1.3</u> (15 punti)
Calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^{\alpha - 1}}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Esercizio 1.4</u> (15 punti)
Calcolare
$$\lim_{r\to+\infty} e^{-r^2} \int_{B(0,r)} e^{|x|+|y|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
Siano a, b due numeri positivi fissati. Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme dei punti (x, y, z) tali che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = b^2 \end{cases}$$

1) (12 punti) Si dimostri che, se $a = b$, allora esistono dei punti di C in cui non è possibile esplicitare due coordinate rispetto alla terza.
2) (13 punti) Dimostrare che, se $a \neq b$, allora è sempre possibile esplicitare due coordinate rispetto alla terza.

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti) **Dissertazione teorica.**
1) (10 punti) Si definiscano le forme differenziali, le forme esatte e si enuncino le relazioni tra loro.
2) (15 punti) Se esistono, trovare tutte le funzioni $Z \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tali che la forma differenziale su $\mathbb{R}^3$
$$\omega(x, y, z) = 2xz\mathrm{d}x + (yz + 3y^2)\mathrm{d}y + Z(x, y)\mathrm{d}z$$
sia esatta. Per tali Z trovare poi una primitiva della forma ottenuta.

GRUPPO 2 (Geometria)

<u>ESERCIZIO 2.1</u> (15 punti)

Sia $U \subset \mathbb{C}$ l'insieme formato dai numeri complessi che hanno modulo uguale a 1.

(a) Dimostrare che $U = \{e^{it}\,;\ t \in \mathbb{R}\}$ e che U è un gruppo moltiplicativo.

(b) Dimostrare che $z \in \mathbb{C}$ ha ordine finito se e soltanto se $z = e^{q\pi i}$, dove $q \in \mathbb{Q}$, e che i numeri complessi di ordine finito formano un sottogruppo H di U.

(c) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : (U, \cdot) \longrightarrow (\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}, +); \quad e^{it} \mapsto \frac{t}{\pi} + \mathbb{Q}$$

è ben definita ed è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Dedurne che c'è un isomorfismo $\overline{\varphi} : \frac{U}{H} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$.

<u>ESERCIZIO 2.2</u> (15 punti)

Calcolare le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto alla base $B := \{(1, 1, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

<u>ESERCIZIO 2.3</u> (15 punti)

Sia $W =< A, B, C >$ il sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ generato dalle matrici:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1-k & 1-k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2.4 (25 punti)
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, rispetto alla base canonica, sono dati i vettori

$$\mathbf{u} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{1}, \mathbf{1}), \mathbf{v} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2}, -\mathbf{1}), \mathbf{w} = (\mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{4}, -\mathbf{1}).$$

i) Stabilire se esiste un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ tale che **u** e **v** sono autovettori di autovalore 2 e **w** è autovettore di autovalore 3. Giustificare la risposta.

ii) Si consideri l' applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2)\mathbf{u} + (\mathbf{2x_3} - \mathbf{x_4})\mathbf{v}$$

. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e determinare la dimensione del nucleo di f .

iii) Verificare la diagonalizzabilità di tale endomorfismo.

ESERCIZIO 2.5 (15 punti) Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$X^2 + 6XY - 7Y^2 - 2x - 6Y - 19 = 0.$$

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Dimostrare il teorema di nullità più rango per un'applicazione lineare

$$f : V \longrightarrow W$$

e dedurne che un'applicazione lineare f è un isomorfismo se e solo se V e W hanno la stessa dimensione e f è iniettiva o suriettiva.