# Prova Finale di Tipo B
# 14 Giugno 2019

**Corso di Laurea in Matematica**

**Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre**

**U. Bessi, A. Bruno, A. Giuliani. F. Tartarone**

## Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

# GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)
Una massa puntiforme di massa 1 è vincolata a muoversi sotto l'effetto della forza peso su una superficie di rivoluzione, di equazione parametrica

$$\mathbf{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \rho^2/2 - \rho^6/6 \end{pmatrix}$$

Il vincolo può supporsi ideale.
1) Si determini la Lagrangiana del sistema e si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange (EL).
2) Si identifichi una variabile ciclica e si calcoli l'integrale primo corrispondente.
3i) Si derivi la Lagrangiana ridotta secondo il metodo di Routh e si scriva la corrispondente equazione di EL.
4) Si identifichino i punti di equilibrio per l'equazione di EL della Lagrangiana ridotta. A quale moti complessivi nelle variabili originali corrispondono tali punti di equilibrio?
5) Si risolva l'equazione di EL della Lagrangiana ridotta per quadrature e si discuta la natura qualitativa dei moti cosi̇̀ ricavati.

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)
Dire per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n > \max(0,-t)} \frac{(n+t)^{nt}}{n!}$$

è convergente.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Trovare tutti i numeri complessi $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano il seguente sistema di equazioni.

$$\begin{cases} z^2\bar{z} - \bar{z}z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1 \end{cases}$$

**Suggerimento.** Capire se si può dividere la prima equazione per $\bar{z}$. Per rappresentare le soluzioni e semplificare i conti potrebbe essere utile ricordarsi la rappresentazione di Eulero.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Si consideri, sulla semiretta $x \geq 0$, la serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x}{1 + n^3 x^3}.$$

1) (5 punti) Dimostrare che la serie converge puntualmente su $x \geq 0$.
2) (7 punti) Dimostrare che la serie converge uniformemente su $x \geq \varepsilon$, per ogni $\varepsilon > 0$.
3) (3 punti) Dimostrare che la serie non converge uniformemente su $x \geq 0$.
**Suggerimento.** Potrà essere utile calcolare la somma in $x = 0$ e stimare la serie dal basso nei punti del tipo $\frac{1}{N}$, con $N$ intero positivo.

Esercizio 1.5 (25 punti)
1) (15 punti) Dato

$$A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 3x^2 + y^2 \leq c^2\}$$

calcolare

$$\int\int_{A_c} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1 + 3x^2 + y^2}.$$

2) (10 punti) Dato

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad : \quad 3x^2 + y^2 \le z^2, \quad 1 \le z \le 2\}$$

calcolare

$$\int\int_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1 + 3x^2 + y^2}.$$

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti) **Dissertazione teorica.**

1) (7 punti) Si enunci la formula di Taylor col resto di Lagrange.

2) (10 punti) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con due derivate continue. Dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) + g(x - h) - 2g(x)}{h^2} = g''(x).$$

3) (8 punti) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con due derivate continue. Si supponga che l'espressione

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x)$$

dipenda solo da $h$, ma non da $x$. Usando il punto 2), dimostrare che $f$ è un polinomio di secondo grado.

---

# GRUPPO 2 (Geometria)

Esercizio 2.1 (15 punti)
Si consideri l'anello di polinomi $\mathbb{Z}_5[X]$ e sia $f(X) := X^4 + 3X^2 + 2X - 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$.
1) Stabilire se $A := \mathbb{Z}_5[X]/(f(X))$ è un campo.
2) Descrivere gli eventuali divisori dello zero di $A$.
3) Trovare l'inverso dell'elemento $\overline{X^3 + 3X + 2}$ di $A$.

Esercizio 2.2 (15 punti)
Si calcoli in $\mathbb{R}^3$ una base ortonormale del sottospazio $W$ ortogonale al vettore $(1, 1, 1)$ e si calcolino rispetto a tale base le componenti della proiezione del vettore $(1, 0, 0)$ su $W$.

Esercizio 2.3 (15 punti)
Sia $W =< p, q, r >$ il sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}_4[T]$ dei polinomi di grado al piú 4 generato dai polinomi:

$$p(T) = 1 - T^2, \qquad q(T) = T - 1, \qquad r(T) = 1 + T^3$$

Si determini la dimensione di $W$ e una sua base al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4 (25 punti)
Sia $T$ l'endomorfismo di $\mathbb{R}[x]$ che associa al polinomio $p(x) = ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ il polinomio

$$T(p(x)) = (a+kb)x^2 + (ka+b)x + kc$$

1) Trovare la matrice associata a $T$ rispetto alla base $\{x^2, x, 1\}$.
2) Calcolare gli autovalori di T.
3) Discutere la diagonalizzabilitá di $T$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

---

Esercizio 2.5 (15 punti) Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$XY = 1.$$

---

Esercizio 2.6 (25 punti)
**Dissertazione teorica.**
Dimostrare che gli autovalori di una matrice simmetrica di ordine 3 sono reali.