

Prova Finale di Tipo B
13 Settembre 2019

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, A. Giuliani. F. Tartarone

Istruzioni

- (a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
- (b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
- (c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

ESERCIZIO 1.1 (15 punti)

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale

$$\ddot{x} = -2x(2x^2 - 6x + 3)$$

per $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Si identifichi una grandezza conservata del sistema.
- 2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
- 3) Si discuta la natura qualitativa del moto al variare dei dati iniziali. In particolare: si disegni il grafico delle traiettorie nel piano delle fasi ('curve di livello') e si discuta per quali dati iniziali il moto è periodico o aperiodico.
- 4) Si calcoli il periodo del moto con dati iniziali $(x_0, \dot{x}_0) = (1, 0)$ in termini di un integrale definito.

ESERCIZIO 1.2 (15 punti)

- 1) (7 punti) Dimostrare che

$$x^x \geq \sin x$$

per ogni $x \geq 1$.

- 2) (8 punti) Dimostrare che

$$x^x \geq \sin x$$

per ogni $x \in (0, 1)$.

ESERCIZIO 1.3 (15 punti)

Per $\alpha > 0$ si consideri la serie

$$\sum_{n \geq 0} a^{\sqrt{n}}.$$

Si dimostrino i fatti seguenti.

- 1) (7 punti) Dimostrare che, per $a \geq 1$, la serie non converge.

2) (3 punti) Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} 2^{\frac{n}{2}} = +\infty.$$

3) (5 punti) Dimostrare che la serie converge per $a \in (0, 1)$.

Suggerimento. Per il terzo punto, potrebbe essere utile usare il criterio di condensazione seguito da quello della radice, tenendo presente il limite del punto 2).

ESERCIZIO 1.4 (15 punti)

Sia γ una curva semplice chiusa, che giace nel piano di equazione $ax + by + cz = 0$. Si supponga che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ricordandosi il teorema del rotore e la definizione dell'integrale di una 1-forma, dimostrare che l'area della regione del piano interna a γ è data da

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz.$$

ESERCIZIO 1.5 (25 punti)

Si consideri l'insieme di numeri reali

$$A = \left\{ x + \frac{1}{x^n} : x > 0, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1) (10 punti) Trovare il sup di A .

2) (10 punti) Calcolare il minimo della funzione

$$f_n(x) = x + \frac{1}{x^n}$$

e dimostrare che è più grande di 1.

3) (5 punti) Usando il punto 2) trovare l'inf di A .

ESERCIZIO 1.6 (25 punti) **Dissertazione teorica.**

1) (10 punti) Si definisca l'integrale improprio secondo Riemann.

2) (3 punti) Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1} dt$$

è definita per $x \in (0, 1]$.

3) (7 punti) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

4) (5 punti) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x).$$

Suggerimento. Per il quarto punto, potrebbe essere utile il teorema dell'Hopital.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)

Dato l'anello $\mathbb{Z}_3[X]$, si consideri l'ideale

$$I = (X^5 + X^4 + 1, X^2 + X + 1).$$

- 1) Stabilire se I è principale e se lo è trovare un generatore di I .
- 2) Descrivere il quoziente $\mathbb{Z}_3[X]/I$ e stabilire se è un campo.
- 3) Trovare, se esistono, gli inversi degli elementi $\overline{X + 2}$ e $\overline{X + 1}$.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)

Trovare quattro matrici A, B, C, D quadrate di ordine 2 tali che se G è la matrice quadrata di ordine 4:

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

si ha $\det G \neq \det A \det D - \det B \det C$.

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, k)$ è un autovettore della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e in corrispondenza di tali valori determinare l'autovalore corrispondente all'autovettore.

ESERCIZIO 2.4 (25 punti)

Nello spazio \mathbb{R}^3 si considerino i piani π_1 di equazione $2X + Y = 1$ e π_2 di equazione $X = 2Y$.

- 1) Determinare la mutua posizione dei due piani.
- 2) Scrivere equazioni cartesiane della retta parallela a π_1 , perpendicolare a π_2 e passante per l'origine.

ESERCIZIO 2.5 (15 punti) Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$9X^2 + 4XY + 6Y^2 - 10 = 0$$

ESERCIZIO 2.6 (25 punti)

Dissertazione teorica.

Dimostrare che gli autovalori di una matrice simmetrica di ordine 3 sono reali.
