Prova Finale di Tipo B
15 Febbraio 2019

Corso di Laurea in Matematica

Dipartimento di Matematica e Fisica – Università di Roma Tre

U. Bessi, A. Bruno, A. Giuliani. F. Tartarone

Istruzioni

(a) La sufficienza viene raggiunta con un punteggio di almeno 25 punti in ciascuno dei due gruppi di esercizi.
(b) Scrivere nome, cognome, numero di matricola e apporre la propria firma su ogni foglio che si intenda consegnare.
(c) Usare fogli diversi per esercizi di gruppi diversi.

GRUPPO 1 (Analisi)

Esercizio 1.1 (15 punti)
Si consideri il sistema Hamiltoniano di Hamiltoniana

$$H(q,p) = p(q^2 + p^2 - 1)(q^2 + p^2 - 3).$$

1) Si scrivano le equazioni di Hamilton e si verifichi esplicitamente che H è una grandezza conservata.
2) Si determinino i punti di equilibrio del sistema.
3i) Si disegni un grafico qualitativo delle curve di livello del sistema $H(q,p) = E$ nel piano delle fasi (q,p), al variare di E, e se ne determini il verso di percorrenza.
4) Si discuta la stabilità dei punti di equilibrio.
5) Si risolvano esplicitamente le equazioni del moto per dati iniziali $q(0) = 0$, $p(0) = 1$.

Esercizio 1.2 (15 punti)
Dato $\alpha \geq 0$, si consideri la successione definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}. \end{cases}$$

1) (5 punti) Dimostrare che, se $\alpha < 2$, allora $a_n < 2$ e $a_{n+1} > a_n$ per tutti gli n.
2) (5 punti) Dimostrare che, se $\alpha > 2$, allora $a_n > 2$ e $a_{n+1} < a_n$ per tutti gli n.
3) (5 punti) Dimostrare che, per ogni $\alpha \geq 0$, $a_n \to 2$.

Esercizio 1.3 (15 punti)
Sia $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca

$$g(x) = \max_{y\in[0,x]} |f(y)|.$$

Dimostrare i fatti seguenti.
1) (3 punti) La funzione g è monotona crescente, e

$$g(x) \geq |f(x)| \qquad \forall x \geq 0.$$

2) (4 punti) Dimostrare che, per ogni $\delta \in (0,x)$, si ha che

$$g(x) = \max(\max_{x\in[0,x-\delta]} |f(x)|, \max_{x\in[x-\delta,x]} |f(x)|).$$

3) (4 punti) Si fissi $x > 0$. Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$, si può trovare $\delta \in (0,x)$ tale che

$$\max_{[x-\delta,x]} |f(x)| \leq g(x-\delta) + \varepsilon$$

e

$$\max_{[x,x+\delta]} |f(x)| \leq g(x) + \varepsilon.$$

Suggerimento. Ricordarsi che f è continua.
4) (4 punti) Usando i punti 1), 2) e 3), dimostrare che g è continua.

Esercizio 1.4 (15 punti)
Sia γ una curva semplice chiusa, che giace nel piano di equazione $ax+by+cz = 0$. Si supponga che $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ricordandosi il teorema del rotore e la definizione dell'integrale di una 1-forma, dimostrare che l'area della regione del piano interna a γ è data da

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (bz-cy)\mathrm{d}x + (cx-az)\mathrm{d}y + (ay-bx)\mathrm{d}z.$$

<u>Esercizio 1.5</u> (25 punti)
Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

1) (5 punti) Per quali $x \in \mathbb{R}$ è definita la funzione f?
2) (5 punti) Dimostrare che f è pari e di classe C^1.
3) (10 punti) Dimostrare che f è non-negativa.
Suggerimento. Dimostrare che l'integrale su $[k\pi, (k+1)\pi]$ è più grande, in valore assoluto, dell'integrale su $[(k+1)\pi, (k+2)\pi]$.
4) (5 punti) Calcolare (se esiste)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{x^2}.$$

<u>Esercizio 1.6</u> (25 punti) **Dissertazione teorica.**
1) (10 punti) Si enunci la formula di Taylor con resto di Lagange.
2) (15 punti) Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione con due derivate continue; si supponga che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0.$$

Suggerimento. Taylor al secondo ordine con resto di Lagrange potrebbe essere utile.

GRUPPO 2 (Geometria)

ESERCIZIO 2.1 (15 punti)

Sia $U \subset \mathbb{C}$ l'insieme formato dai numeri complessi che hanno modulo uguale a 1.

(a) Dimostrare che $U = \{e^{it}\,;\ t \in \mathbb{R}\}$ e che U è un gruppo moltiplicativo.

(b) Dimostrare che $z \in \mathbb{C}$ ha ordine finito se e soltanto se $z = e^{q\pi i}$, dove $q \in \mathbb{Q}$, e che i numeri complessi di ordine finito formano un sottogruppo H di U.

(c) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : (U, \cdot) \longrightarrow (\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}, +); \quad e^{it} \mapsto \frac{t}{\pi} + \mathbb{Q}$$

è ben definita ed è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Dedurne che c'è un isomorfismo $\overline{\varphi} : \frac{U}{H} \longrightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Q}}$.

ESERCIZIO 2.2 (15 punti)

Sia A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^8.

ESERCIZIO 2.3 (15 punti)

Sia $W =< p, q, r >$ il sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}_4[T]$ dei polinomi di grado al piú 4 generato dai polinomi:

$$p(T) = 1 - T^3, \qquad q(T) = T^2 - 1, \qquad r(T) = T^2 - k$$

Si determini la dimensione di W e una sua base al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.4 (25 punti)
Si considerino le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 5 & k-2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice B é diagonalizzabile.
2) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le due matrici sono simili.

Esercizio 2.5 (15 punti) Ridurre in forma canonica e descrivere le proprietà della conica che nel piano euclideo é descritta dall'equazione

$$X^2 + 4XY + 4Y^2 - 6x + 1 = 0.$$

Esercizio 2.6 (25 punti)
Dissertazione teorica.
Dimostrare il Teorema spettrale