Tensione Superficiale e capillarità: osservazioni pratiche e misure sperimentali

C. Meneghini, F. Bruni

1. La tensione superficiale: fenomeni e osservazioni

La superficie di separazione tra due mezzi è una regione particolare, infatti all'interfaccia tra sostanze diverse e/o fra stati diversi della materia (liquido solido, gas) le molecole non sono in un ambiente isotropo come nel volume, ma sono soggette a interazioni fortemente asimmetriche determinate dalle differenze chimico-fisiche dei due mezzi. Queste interazioni, attive nelle zone di interfaccia, danno luogo a fenomeni particolari di grande importanza e che possono avere risvolti applicativi e tecnologici rilevanti. In questo primo paragrafo vediamo alcuni fenomeni particolari che poi cercheremo di spiegare e interpretare quantitativamente.

Osservazione 1:
La legge di Archimede afferma che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato. Diretta conseguenza è il fatto che materiali meno densi dell'acqua galleggino mentre materiali più densi affondino: di fatto l'esperienza comune ci fa vedere che alcuni oggetti affondano parzialmente in acqua (es. ghiaccio o legno) poi rimangono in equilibrio e, anche se spinti a fondo, tendono a tornare a galla; altri materiali (ad esempio pezzi di metallo, monete) se messi in acqua affondano.

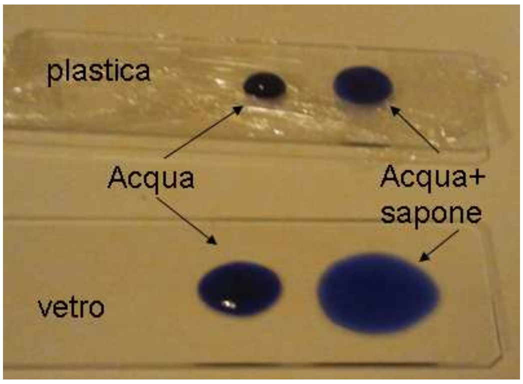
In alcuni casi si possono osservare comportamenti strani, che sembrano contraddire la legge di Archimede come mostrato in figura: ad esempio piccoli oggetti metallici possono non affondare ma rimanere *poggiati* sulla superficie dell'acqua se deposti con le dovute cure, si possono vedere insetti che camminano *sull'acqua*: l'insetto in figura cammina sopra la superficie dell'acqua ma non per effetto della spinta di Archimede: infatti dal momento che non immerge nell'acqua ne zampe ne corpo non può risentire di una spinta di galleggiamento.

Come esempio provate a far galleggiare piccoli oggetti metallici, e non, come quelli mostrati in figura (una graffetta metallica, pezzetti di filo metallico ottenuti spellando un filo elettrico, lenticchie, un ago di metallo, limatura di ferro, etc..). Vediamo che è possibile far *galleggiare* questi oggetti nonostante siano costituiti da materiali più densi dell'acqua. Tuttavia l'intento richiede una certa cura nel deporli molto delicatamente sulla superficie del liquido. Non solo, basta una piccola perturbazione e l'oggetto va a fondo. Quale è la differenza tra il galleggiamento di questi e il caso di oggetti meno densi dell'acqua, come una pallina o una barchetta?

Osservate da vicino la superficie dell'acqua che sostiene una graffetta o un oggetto che normalmente affonda, cosa si nota? A guardar bene in figura la superficie dell'acqua sotto la graffetta o sotto le zampe dell'insetto appare incurvata, come una tela o una membrana su cui sia posto un peso. Facciamo ora cadere una goccia di sapone sulla superficie dell'acqua mentre la graffetta galleggia, cosa si osserva? La graffetta va immediatamente a fondo. Sicuramente si può trascurare la variazione di densità dell'acqua per effetto di una singola goccia di sapone in un bicchiere, quindi ci deve essere qualche altro meccanismo in atto, diverso dalla spinta di Archimede. Per riprova facciamo lo stesso con un cubetto di legno: questo continuerà a galleggiare anche in acqua e sapone.

Osservazione 2:

Osserviamo una goccia di acqua sulla superficie di un vetrino da microscopio: che forma ha? Proviamo a toccare la superficie della goccia con una punta pulita (metallo, vetro): la bolla risponde in modo elastico alla sollecitazione e tende a ripristinare la sua forma.



Tocchiamo adesso la bolla con la stessa punta appena sporca di sapone, in questo caso la bolla si rompe e si allarga, come se la superficie diventasse meno resistente.

Che correlazione c'è con quello che succede alla graffetta in acqua? Sembra che il sapone riduca la capacità della superficie dell'acqua di supportare il peso della graffetta, in pratica rende la superficie meno resistente.

Osservazione3:

Riempiamo fino all'orlo una bottiglietta, poi con una pipetta o un contagocce proviamo ad aggiungere pian piano acqua oltre l'orlo. Cosa vi aspettate? Cosa osservate?

Man mano che aggiungete acqua il livello del liquido sale e supera l'orlo della bottiglia di alcuni millimetri. Provate a toccare la superficie dell'acqua con una bacchetta pulita, la superficie risponde elasticamente alle sollecitazioni e, purché siate abbastanza delicati, la superficie non si rompe ma ripristina la sua forma iniziale.

Che forma ha la bolla? Sapreste definire una figura geometrica che la rappresenta? Utilizzando contenitori con aperture diverse, cosa cambia? Cosa succede se toccate la bolla con un oggetto sporco di sapone? Che analogia c'è con i casi precedenti?

Prendete una bottiglia di plastica vuota e immergetela in acqua a testa in giù. Premendo leggermente si viene a formare una bolla d'aria al di sotto del collo. Che caratteristiche ha la bolla? Cosa succede se si lascia cadere una goccia di sapone nell'acqua?

Osservazione 4:

Mettiamo dell'acqua pura (di rubinetto o acqua distillata) in un bicchierino poi, con una pipetta o un contagocce peschiamone un po' e facciamo cadere alcune gocce in un contenitore su una bilancia da laboratorio. Osserviamo le gocce: sono tutte molto simili. Pesiamo un certo numero di gocce, vediamo che il peso medio delle gocce è ben riproducibile. Proviamo a capire perchè guardando da vicino una goccia che si stacca (ad esempio facendo foto o una ripresa con un cellulare): prima si forma una semisfera, poi la parte sottostante si allarga mentre in alto, all'attaccatura del capillare, si forma un *collo* che man mano si stringe fino a staccarsi. Il comportamento è analogo a quello che succede con un palloncino (mai fatto gavettoni?). Di nuovo la superficie del liquido si comporta come una membrana elastica che racchiude il liquido al suo interno. La goccia si rompe quando il *collo* non riesce più a sopportarne il peso. Il fatto che le gocce siano tutte eguali ci fa pensare che il peso massimo che può sostenere il collo della goccia sia una proprietà della superficie dell'acqua.

Se ora lasciamo cadere una goccia di detersivo nel bicchierino e ripetiamo l'esperimento cosa osserviamo? Se ora si pesano le gocce di acqua e sapone vediamo che il peso è sensibilmente ridotto anche se questo non può essere dovuto ad un effetto di variazione di densità, vista l'esigua quantità di sapone introdotta. Deve essere quindi la resistenza della superficie dell'acqua sul collo della goccia che è diminuita.

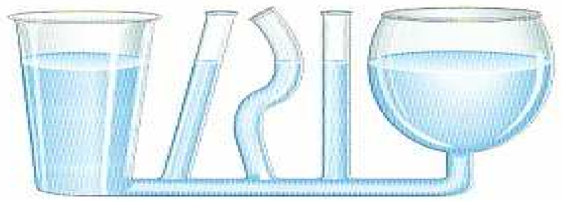
Nota: se il peso delle gocce con acqua e sapone è dimezzato rispetto al caso dell'acqua pura, quanto è minore il diametro delle gocce? Prova a valutarlo ad occhio mettendo un foglio di carta millimetrata posto dietro la pipetta e confrontalo con quello che ti aspetti. Potete usare un cellulare per filmare le gocce e poi visualizzarle ingrandite.

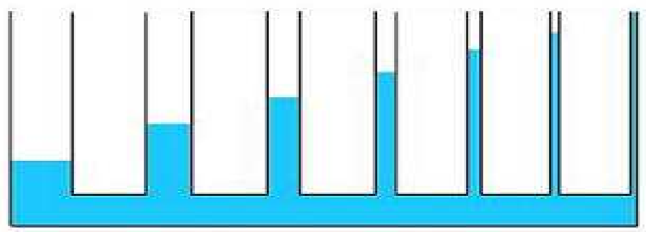
Vi viene in mente un altro modo per valutare la quantità di acqua nelle gocce senza pesarle?

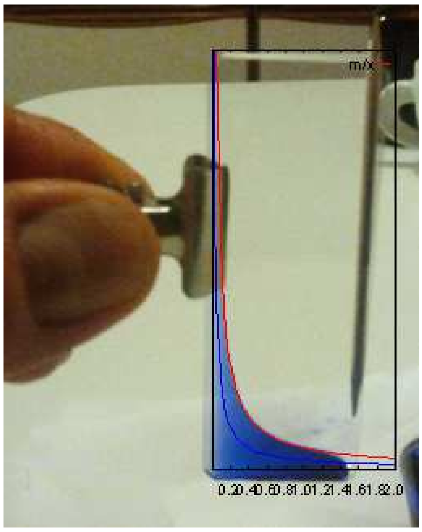
Vi viene in mente un altro modo per valutare la quantità di acqua nelle gocce utilizzando una bilancia meno sensibile di una bilancia da laboratorio?

Osservazione 5:

Conosciamo dai corsi di fisica la legge dei vasi comunicanti, per cui quando un fluido riempie un sistema di recipienti messi in comunicazione tra loro, la superficie libera si trova sempre alla stessa altezza, indipendentemente dalla forma del recipiente (figura). Tuttavia se utilizziamo contenitori molto stretti come, ad esempio, capillari molto sottili (sezione dell'ordine del mm o meno), la legge dei vasi comunicanti sembra non essere più valida (figura): ad esempio se immergiamo in acqua l'estremità della pipetta tenuta aperta si vede che l'acqua risale nel capillare e il fenomeno è via via più evidente man mano che si restringe la sezione dei capillari.







Facciamo il seguente esperimento: prendiamo due vetrini da microscopio, uniamo i due vetrini mettendo da una parte uno spessore di 1-2 mm (Es. uno stecchino) e usiamo una pinzetta per stringere i vetrini all'altra estremità come in figura. Mettiamo dell'acqua in un contenitore (es. il coperchio di una capsula Petri o un piattino) e eventualmente coloriamo l'acqua con dell'inchiostro. Quando immergiamo la base inferiore dei vetrini nell'acqua vediamo che il liquido risale tra i vetrini, come risucchiato e l'effetto è via via più evidente dalla parte dove i vetrini sono uniti, il che, di nuovo, sembra contraddire il principio dei vasi comunicanti: la superficie libera dell'acqua non resta alla stessa altezza neanche nello stesso contenitore!

Cosa succede se invece di due vetrini si usano due lamine di plastica? (oppure copriamo il vetrino con scotch trasparente o pellicola per alimenti)? Nel caso della plastica l'acqua non risale (o sale molto meno), il che ci fa pensare che il fenomeno sia legato a fenomeni di interazione all'interfaccia tra acqua e le pareti del contenitore. E cosa succede se i vetrini sono sporchi (es un po' unti)?

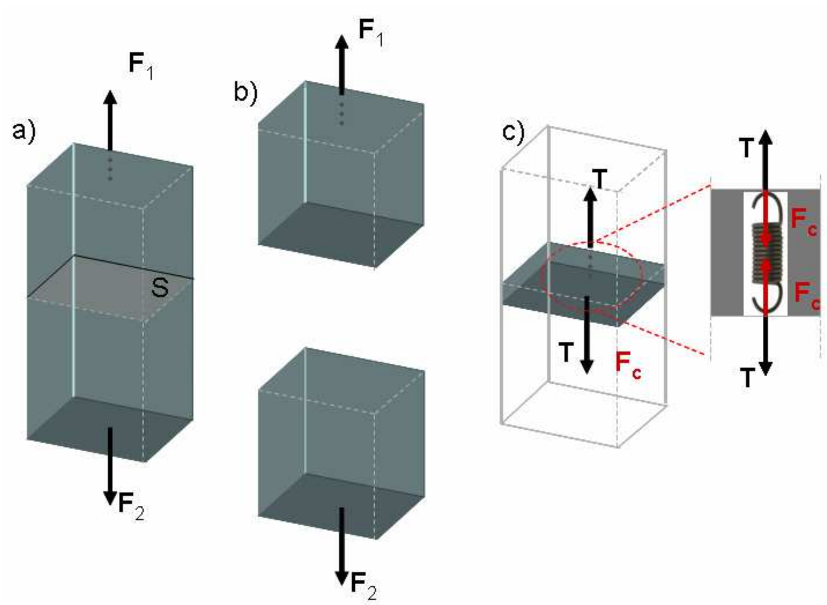
Osservazione 6:

Come è collegato l'effetto di capillarità con la tensione superficiale? Prendiamo dei capillari sottili di vetro e proviamo a vedere di quanto si innalza la superficie di fluidi diversi: acqua pura, acqua saponata, olio, etc...

Che effetto vi aspettate? Quali effetti osservate?

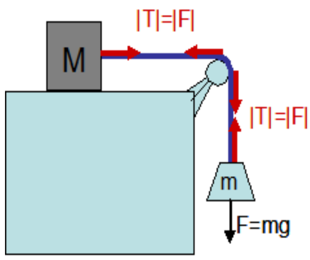
Osserviamo da vicino gocce d'acqua su superfici diverse: vetro pulito, vetro sporco, cera, plastica, quali differenze rilevate?

2. Interpretazione fisica: la *tensione superficiale* e *capillarità*



Gli esperimenti e le prove fatte nella sezione precedente (in particolare da 1 a 4), suggeriscono che la superficie dell'acqua (e in generale la superficie di un fluido) si comporti come una membrana elastica che racchiude il liquido e cerca di mantenerlo coeso. Il che ci suggerisce di usare strumenti e i concetti fisico matematici creati per studiare l'elasticità dei materiali, per interpretare e quantificare i fenomeni osservati.

Partiamo quindi dal concetto di *tensione* per un solido, noto dai corsi di fisica: consideriamo una sbarretta come in figura ai cui estremi agiscano due forze eguali in modulo F_1 e F_2 che esercitano una trazione in direzioni opposte. Il corpo è in equilibrio dal momento che le due forze hanno una risultante nulla. Se però tagliamo la sbarretta lungo il taglio S questa si separa in due pezzi che si allontanano sotto l'azione delle due forze F_1 e F_2 e questo indipendentemente da dove effettuiamo il taglio (in alto, in basso, in mezzo). Dobbiamo quindi immaginare, all'interno della sbarretta, un sistema di forze interne di coesione che tengono unito il materiale opponendosi all'azione delle forze esterne. In pratica se consideriamo una generica fettina di sbarretta di spessore infinitesimo come nel pannello c in figura, sulle due facce di questa agiscono sempre due forze eguali ed opposte T che sono la risultante delle forze esterne (F_1 e F_2) che si scaricano lungo la sbarretta fino alla superficie della fettina. Nel caso in figura i moduli delle forze esterne e delle forze di tensione sono eguali: $|T|=|F_i|$. Queste tensioni sono a loro volta bilanciate dalle forze interne di coesione che tengono unite le molecole del materiale (nel caso dell'acqua i numerosi legami idrogeno esistenti). Le forze T sono eguali in modulo alle forze interne di coesione F_c tra le molecole del solido. Indicando con Σ la sezione della sbarretta la grandezza:

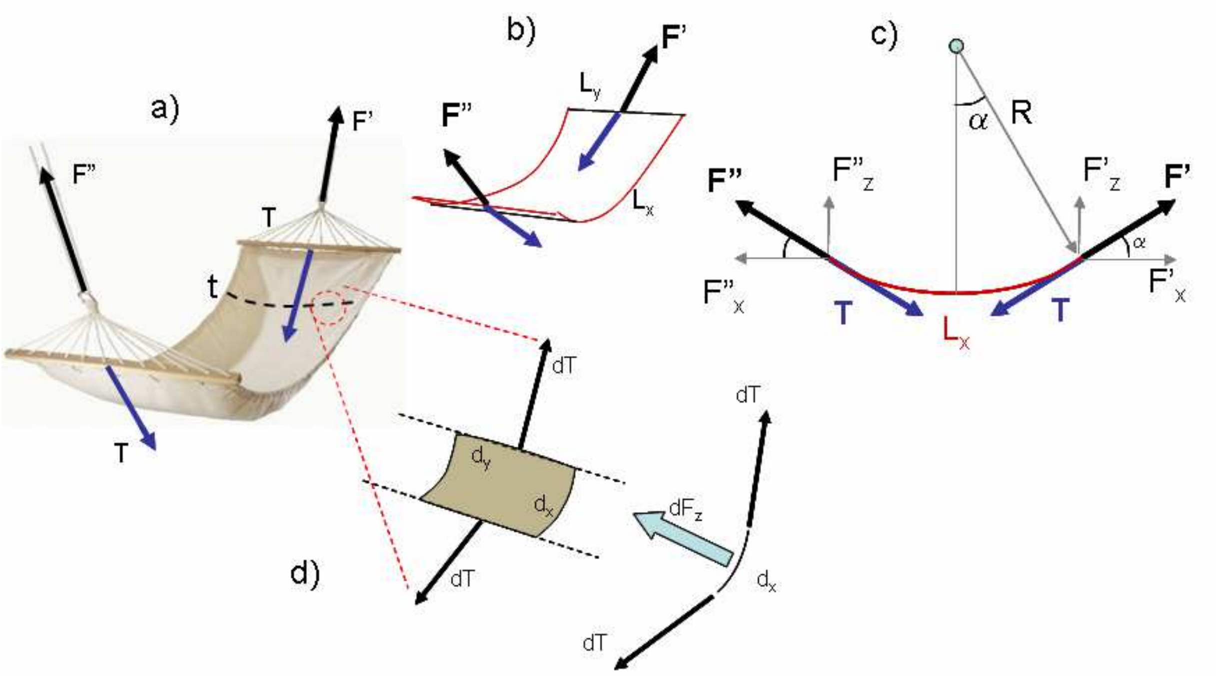


$$\sigma = \frac{F_\perp}{\Sigma}$$

indica la forza per unità di superficie che agisce su Σ. Questa è spesso più importante della forza totale in quanto indica i valori punto per punto. anche in casi meno ideali e simmetrici di quello presentato.

In fisica il concetto di tensione è utile trattando problemi che coinvolgono funi e corde, ovvero corpi le cui dimensioni trasverse siano trascurabili rispetto alla lunghezza e che possono essere piegati senza sforzo, come quello in figura 2: una massa m è appesa ad una fune libera di scorrere su una carrucola. La forza che la massa esercita sulla fune determina una tensione T lungo tutta la fune e la tensione T è in ogni punto eguale in modulo alla forza applicata F=mg. Quindi la forza che agisce sulla massa grande M è proprio F=T=mg. All'interno della fune, su ogni elemento di questa agiscono le forze di tensione, che tendono a rompere la fune (trazione) bilanciate da forze di coesione eguali ed opposte.

Consideriamo ora una *membrana sottile*, anche questo è un concetto limite che indica un oggetto bidimensionale di spessore trascurabile rispetto alla sua superficie che può essere piegato e arrotolato senza sforzo, come una tela. Analogamente a quanto visto per un corpo tridimensionale o per un filo, se applichiamo una forza al bordo della membrana questa si scarica su tutta la superficie della tela determinando forze di tensione che agi-



scono su ogni elemento della tela. Al contempo le forze di coesione (interne) del materiale si oppongono alle forze di tensione per mantenere coesa la membrana.
Consideriamo ad esempio l'amaca in figura: una tela larga L_y e lunga L_x. Le forze F' e F" dei tiranti la tengono sospesa mentre la tela si incurva sotto il suo stesso peso o sotto il peso di chi ci si sdraia. All'equilibrio tutte le forze si bilanciano: le forze F si scaricano lungo tutta la superficie della tela sotto forma di forze di tensione T. Queste, in ogni punto, sono bilanciate dalle forze interne di coesione infatti se tagliassimo la tela i due lembi si separerebbero sotto l'azione delle tensioni. Vediamo quali sono le forze che agiscono sul sistema e, per semplificare il problema, assumiamo che l'amaca si curvi su una superficie cilindrica di raggio R come nello schema b e c in figura. Le forze F hanno sia una componente orizzontale che una componente verticale, le componenti orizzontali: F'_x e F''_x sono eguali ed opposte quindi si annullano. Le componenti verticali F'_z e F''_z sono concordi e si sommano bilanciando la forza peso dell'amaca. Dal momento che $|F'|=|F''|=F$ la forza risultante in verticale è:

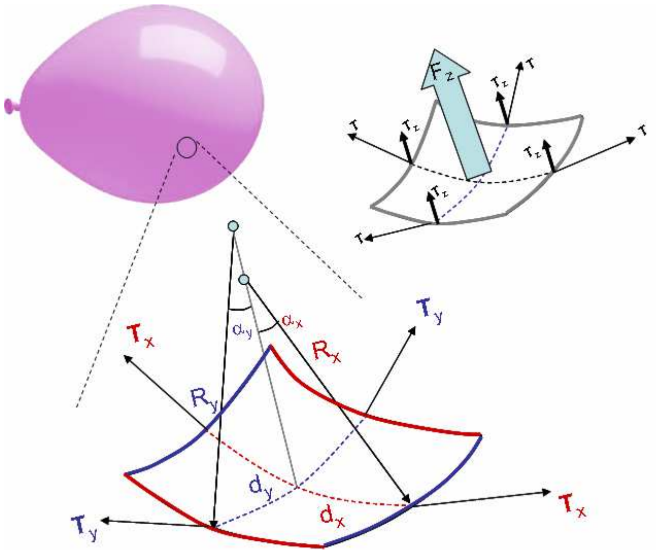
$$F_z = 2F \sin\alpha \cong F\frac{L_x}{R}$$

dove abbiamo usato il fatto che per piccoli angoli $\sin \alpha \sim \alpha = L_x/2R$.
All'equilibrio $F_z=mg$ ovvero la componente verticale della forza dei tiranti è eguale ed opposta alla forza peso che tira l'amaca verso il basso. Ora andiamo a vedere cosa succede su ogni pezzetto della tela (pannello d della figura): prendiamo un pezzetto di superficie molto piccolo di lati d_x e d_y ; sui lati d_y agiscono le forze di tensione dT, eguali in modulo e in direzione opposta. Per effetto della curvatura le tensioni dT hanno una piccola componente diretta verso il centro di curvatura della tela, queste componenti danno luogo ad una forza perpendicolare alla superficie che sostiene il peso. Le forze dT sui lati del pezzetto di superficie considerato sono una frazione di tutta la forza T che agisce sul taglio di lunghezza L_y, una semplice proporzione ci permette di calcolare:

$$dT = d_y \frac{T}{L_y} = d_y \gamma$$

dove γ indica è la forza per unità di lunghezza che si esercita sulla tela dell'amaca. Dal momento che le forze di tensione sono in ogni punto eguali e opposte alle forze di coesione che impediscono alla tela di strapparsi, γ è detta tensione superficiale e quantifica anche la forza di coesione per unità di lunghezza esercitata dal materiale della tela. Se F è la forza che agisce su un segmento di lunghezza L, la tensione superficiale si definisce come il rapporto:

$$\gamma = \frac{F_\perp}{L}$$



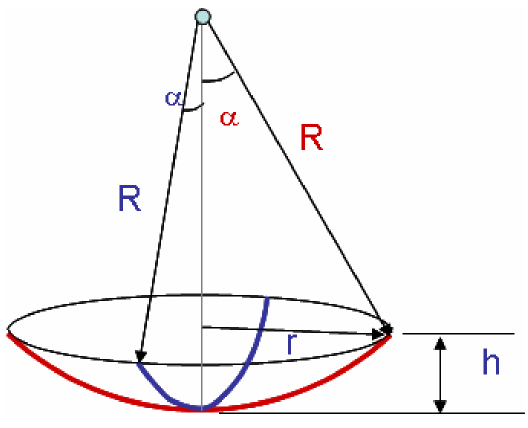
tra la componente della forza perpendicolare al segmento $F_\perp$ e la lunghezza del segmento stesso.
Trattando membrane elastiche c'è un altro modo per definire la tensione superficiale: ovvero come il rapporto tra il lavoro elementare fatto per aumentare la superficie della membrana di una quantità infinitesima dΣ e l'aumento di superficie:

$$\gamma = \frac{dL}{d\Sigma}$$

In questo modo γΣ ha le dimensioni di un'energia e rappresenta proprio l'energia elastica accumulata nella superficie Σ.
Utilizzando la definizione di γ possiamo ricalcolare la forza F_z perpendicolare alla superficie:

$$F_z \cong F\frac{L_x}{R} = \frac{F}{L_y}\frac{L_y L_x}{R} = \gamma\frac{L_y L_x}{R} = \gamma\Sigma\frac{1}{R}$$

Per avvicinarci al problema delle nostre "bolle d'acqua" consideriamo l'esempio di un palloncino che si gonfia: sotto l'effetto della pressione dell'aria la membrana del palloncino si tende. Per mantenere in equilibrio il sistema le forze dovute alla pressione dell'aria (verso l'esterno) devono essere bilanciate dalle forze di tensione della membrana di plastica del palloncino. Se consideriamo il generico elemento di superficie del palloncino vediamo che sui bordi di questo agiscono forze di tensione T le cui componenti tangenti alla superficie sono eguali ed opposte, tuttavia, per effetto della curvatura, si ha una forza netta diretta verso l'interno del palloncino (F_z) perpendicolare alla superficie. Possiamo estendere lo stesso ragionamento seguito nel caso dell'amaca prendendo un pezzetto della superficie del palloncino di superficie di lati d_x e d_y e considerando le tensioni elementari che agiscono su di essi. Si ottiene cosi la formula di Young Laplace:



$$F_z \cong \gamma\Sigma\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)$$

dove $\Sigma = d_x d_y$ è l'elemento di superficie e R_x R_y sono i raggi di curvatura lungo x e y, a priori distinti. Trattando di fluidi (in questo caso il gas del palloncino) è più utile usare la pressione, ovvero la forza esercitata per unità di superficie, in questo caso si ha:

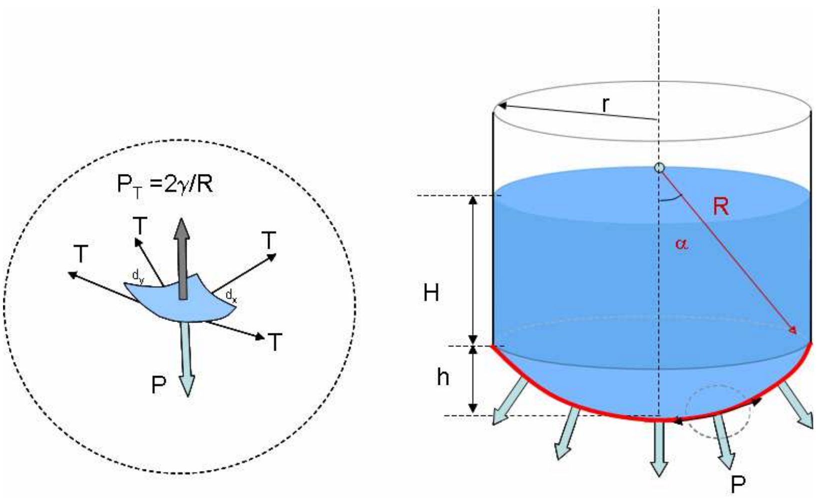
$$P = \frac{F_z}{\Sigma} = \gamma\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) \qquad \text{FORMULA 1}$$

che ci permette di quantificare la pressione sulla superficie del palloncino. Nel caso di una superficie sferica i raggi di curvatura sono eguali : $R_x = R_y = R$, si ottiene quindi:

$$P = \frac{F_z}{\Sigma} = \frac{2\gamma}{R} \qquad \text{FORMULA 2}$$

che fa vedere come la risultante verticale delle forze applicate sia inversamente proporzionale ai raggi di curvatura della superficie lungo x e y (R_x e R_y). Nel caso del palloncino la forza F_z della superficie elastica è diretta verso l'interno, ortogonale alla superficie, e si oppone alla pressione dell'aria che spinge verso l'esterno.

Per fare un altro esempio pratico consideriamo un cilindro di vetro o plastica di raggio r chiuso da una membrana elastica ad una delle estremità (un pezzo di un guanto di lattice o di un palloncino di plastica). Man mano che riempiamo di acqua il cilindro la membrana si deforma. Indichiamo con h la deformazione massima, con R il raggio di curvatura della superficie. Su ogni elemento della superficie elastica agiscono le forze di pressione della colonna di acqua soprastante, bilanciate dalle forze di pressione. Se h<<H la pressione dell'acqua è, in ogni punto della superficie, P=ρgH e diretta verso l'esterno della superficie. All'equilibrio le forze di tensione della membrana T, dirette verso l'interno della superficie, devono bilanciare le forze dovute alla pressione dell'acqua: la pressione di una colonna di acqua alta H è $P_A = \rho g H$, mentre la pressione della membrana è $P_T = 2\gamma / R$ quindi (Formula 2):



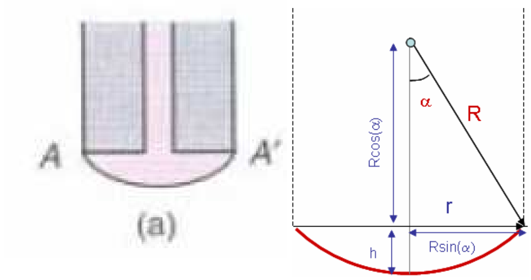
$$\rho g H = \frac{2\gamma}{R} \quad \text{da cui, invertendo, si ha:} \quad R = \frac{2\gamma}{\rho g H}$$

Liquido	Tensione superficiale	Temperatura (°C)
Alcool etilico	0.0223	20
Olio di oliva	0.0320	20
Glicerina	0.0631	20
Acqua	0.0756	0
	0.0728	20
	0.0662	60
	0.0589	100
Mercurio	0.465	20
Argento	0.800	970
Oro	1.000	1070
Rame	1.100	1130
Ossigeno	0.0157	-193
Neon	0.0515	-247

ovvero il raggio di curvatura della membrana si riduce aumentando l'altezza della colonna d'acqua nel cilindro. Il raggio di curvatura di una superficie non è facile da misurare mentre è relativamente più facile è misurare la deformazione h (vedi figura), ovvero di quanto si abbassa il minimo della curva (vedi figura alla pag. precedente) e il raggio del cilindro r. Se la deformazione è piccola (h<< R) si ha: $R=r^2/2h$ (vedi NOTA) quindi:

$$\frac{r^2}{2h} = \frac{2\gamma}{\rho g H} \quad \text{ovvero:} \quad h = r^2 \frac{\rho g H}{4\gamma}$$

In pratica la deformazione della membrana (h) aumenta linearmente con l'altezza della colonna di liquido (pressione dell'acqua) ed è inversamente proporzionale alla tensione della sua superficie.

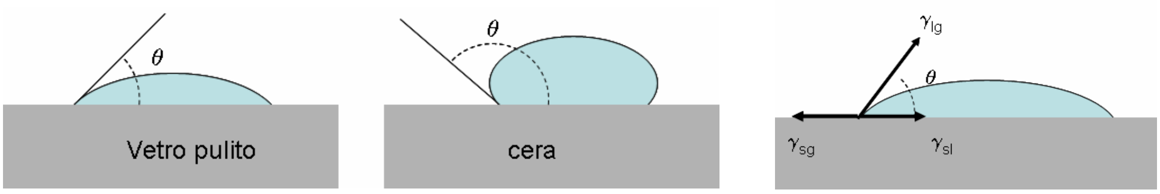


NOTA: con riferimento alle figure qui a fianco in cui il cilindro è mostrato in sezione, si ha: $r=R\sin(\alpha)$ e $h=R-R\cos(\alpha)=R(1-\cos\alpha)$. Per angoli piccoli si può approssimare: $\sin\alpha \cong \alpha$ e $1-\cos\alpha \cong \alpha^2/2$, quindi: $\alpha \sim r/R$ da cui $h \sim r^2/2R$ ovvero: $R \sim r^2/2h$

Se osserviamo la formazione di una bolla d'acqua che si forma all'estremità di un contagocce si presenta una situazione analoga: la superficie dell'acqua si comporta come una membrana elastica: mano mano che aumento la pressione la bolla si gonfia e si incurva (diminuisce il raggio di curvatura).
Sulla superficie della bolla d'acqua la forze di coesione tra le molecole impediscono alla superficie di rompersi e di disperdersi. Fino ad ora abbiamo quindi visto che la superficie di un liquido si comporta in modo analogo ad

una membrana elastica. Utilizzando elementi di meccanica e di teoria dell'elasticità abbiamo ricavato alcune formule che possiamo utilizzare per interpretare in modo quantitativo i fenomeni che avvengono alla superficie di un liquido. Prima di questo però vediamo un po' più in dettaglio il comportamento di un liquido, in particolare delle gocce d'acque e dei capillari.

Capillarità



Avevamo visto che quando un fluido si trova confinato in uno spazio molto ristretto, come tra le pareti di un capillare, la legge dei vasi comunicanti non sembra essere verificata e la superficie libera del liquido si può trovare a quote diverse in funzione del tipo di fluido, del materiale delle pareti, della distanza tra esse. Proviamo a capire il perchè. In effetti anche all'interfaccia tra liquido e solido (*ls*) e tra solido e gas (*sg*) sussistono forze di interazione che dipendono dalla natura chimico fisica dei due mezzi; in questi casi (*sl, sg*) sono dette forze di *adesione*. Se osserviamo da vicino una goccia di acqua posata sulla superficie di un vetro pulito o su una superficie trattata con della cera vediamo che la forma della goccia è notevolmente diversa: sul vetro la goccia tende a distendersi e aumentare la superficie di vetro bagnata, questo effetto è tanto più evidente quanto più pulito è il vetro. Nel caso della cera l'acqua tende a ridurre la superficie di contatto tra cera ad acqua. Si dice che l'acqua *bagna* la superficie del vetro mentre la cera forma una superficie idrorepellente.

interfaccia	angolo di contatto, θ (deg.)
mercurio-vetro	140^o
acqua-vetro pulito	$\sim 0^o$
aqua-paraffina	$\sim 110^o$
aqua-argento	90^o
alcol etilico-vetro	$\sim 0^o$

Anche per le forze di adesione, come per quelle di coesione, si può definire una tensione superficiale come il rapporto tra il lavoro necessario per aumentare la superficie di contatto di una quantità dΣ e l'aumento di superficie stesso:

$$\gamma = \frac{dL}{d\Sigma}$$

Indichiamo con γ_{lg} la tensione superficiale per l'interfaccia liquido aria che abbiamo visto nel paragrafo precedente, γ_{sl} la tensione superficiale all'interfaccia solido-liquido e γ_{sg} la tensione della superficie solido-gas. Abbiamo visto come la γ_{lg} sia dovuta ad un meccanismo analogo a quello che tiene insieme una membrana elastica e ne provoca una curvatura quando l'interfaccia tra liquido e aria deve bilanciare la pressione interna dell'acqua.
In modo del tutto generale avevamo definito la tensione superficiale γ come un'energia per unità di superficie, sappiamo inoltre che un sistema fisico in equilibrio tende ad assumere una configurazione di minima energia, quindi queste forze tendono ognuna ridurre la superficie dell'interfaccia corrispondente e sono dirette verso l'interno della superficie corrispondente come in figura: γ_{sg} tende a ridurre la superficie di gas a contatto con il solido e quindi a espandere la goccia, γ_{sl} tende a ridurre la superficie di liquido a contatto con il solido e quindi a contrarre la goccia, γ_{lg} tende mantenere unite le molecole del liquido e forma la calotta della goccia. All'equilibrio la risultante di tutte le forze deve essere nulla, quindi in ogni punto del contorno della bolla deve valere l'eguaglianza: $\gamma_{sl} - \gamma_{sg} + \gamma_{lg} \cos\vartheta = 0$

Chiamiamo tensione di adesione o adesività la differenza $\gamma_{sg}-\gamma_{sl} = \gamma_{ad}$. Questa può essere positiva, negativa o nulla: se positiva il lavoro necessario per espandere la superficie di contatto tra solido e liquido è minore dell'energia necessaria ad aumentare la superficie di contatto tra solido e gas (aria), in questo caso il sistema tende ad aumentare la superficie di contatto tra goccia e solido e il liquido "bagna" la superficie, essendo:

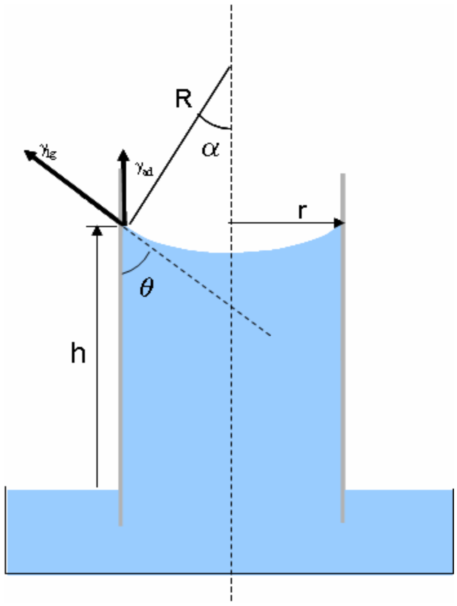
$$\cos\vartheta = \frac{\gamma_{sg} - \gamma_{sl}}{\gamma_{lg}} = \frac{\gamma_{ad}}{\gamma_{lg}} \qquad \text{FORMULA 3}$$

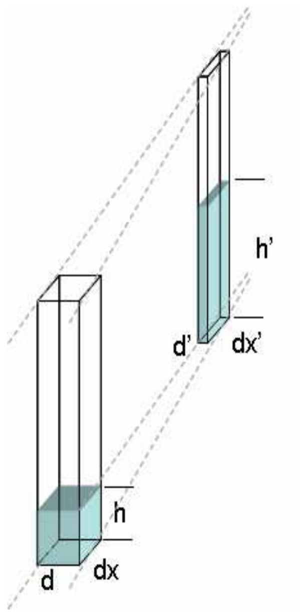
l'angolo θ (angolo di contatto) è minore di 90^o come nel caso del vetro. Se invece la tensione di adesione è negativa vuol dire che il lavoro necessario per espandere la superficie di contatto tra solido e liquido è maggiore dell'energia necessaria ad aumentare la superficie di contatto tra solido e gas (aria), in questo caso il sistema tende a ridurre la superficie di contatto tra goccia e solido e, come nel caso dell'acqua sulla cera, la goccia d'acqua tende ad allontanarsi dal solido. In questo caso l'angolo di contatto è maggiore di 90^o. Se $\gamma_{sg}=\gamma_{sl}$ allora $\gamma_{ad}=0$ e l'angolo di contatto è 90^o come nel caso di acqua su alcuni metalli come l'argento.
E' interessante notare come al diminuire delle forze di coesione del liquido (tensione superficiale γ_{lg}) l'angolo di contatto diminuisce se $\gamma_{ad} > 0$ mentre cresce avvicinandosi a 180^o se $\gamma_{ad} < 0$.
Osserviamo anche che la tensione superficiale del liquido genera una forza con una componente perpendicolare alla superficie: $\gamma_{lg} \sin \vartheta$ Possiamo osservare l'effetto di questa componente perpendicolare lasciando cadere alcune gocce d'acqua sulla superficie di una vernice fresca: la componente verticale della tensione superficiale attrae la vernice e la deforma. Quando la vernice secca e l'acqua evapora si possono osservare anelli in rilievo sulla superficie della vernice.

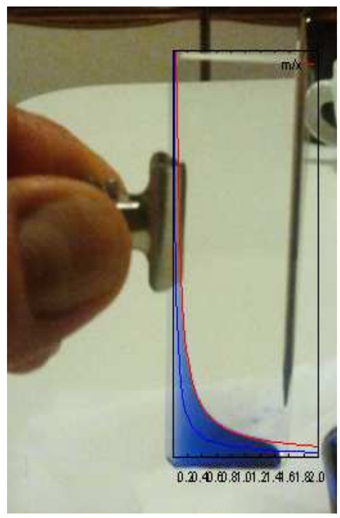
Se osserviamo il comportamento di gocce di acqua su una lastra di vetro vediamo che la forma di queste dipendono anche dal grado di pulizia del vetro: quando il vetro è molto pulito le gocce tendono ad aderire di più riducendo l'angolo di contatto θ, se il vetro è sporco (ad esempio dopo averci strofinato sopra un dito) la goccia tende a ritirarsi e l'angolo di contatto aumenta. E' un fenomeno che conosce bene chi fa immersioni subacquee: quando il vetro della maschera è perfettamente pulito non si appanna, ovvero l'acqua dovuta alla condensa forma un velo sottilissimo e omogeneo che risulta invisibile. Al contrario se il vetro della maschera è sporco, l'umidità condensando forma microscopiche goccioline che rendono opaco il vetro.

Siamo ora in grado di spiegare gli effetti visti per i capillari sottili nel paragrafo precedente. Innanzitutto vediamo perchè l'acqua risale in un capillare sottile e non in un cilindro largo: consideriamo la colonnina di acqua di altezza h all'interno di un capillare di vetro: le forze di adesione sono tali che il sistema ha un guadagno energetico (ovvero la sua energia diminuisce) all'aumentare della superficie di vetro a contatto con l'acqua ($\gamma_{ad} > 0$). Consideriamo una colonna di acqua alta h, il guadagno in energia dovuto alle forze di adesione per un ulteriore innalzamento infinitesimo δz è:
$\delta E_{ad} = \gamma_{ad}\, \delta\Sigma = \gamma_{ad}\, 2\pi r\, \delta z$.

dove $2\pi r$ è la circonferenza del capillare. La superficie libera dell'acqua agisce come un pistone che risucchia verso l'alto il volume di liquido sottostante, questo comporta un dispendio di energia potenziale necessaria a sollevare di δz la massa di acqua nel volumetto sottostante: la massa di acqua è $m=\rho\pi r^2 h$ (ρ essendo la densità dell'acqua) e quindi $\delta E_{pot} = \rho\pi r^2 h\, g\, \delta z$. Eguagliando $\delta E_{ad}=\delta E_{pot}$ si ha: $\gamma_{ad}\, 2\pi r = \rho\pi r^2 h\, g$ e quindi, nel caso di un







capillare di raggio r:

$$h = \frac{2\gamma_{ad}}{\rho gr} = \frac{2\gamma_{H2O}\cos\vartheta}{\rho gr}$$

dove abbiamo indicato con γ_{H2O} la tensione superficiale dell'acqua in aria e usato $\gamma_{ad} = \gamma_{H2O} \cos\theta$.
Si vede quindi che l'altezza dell'acqua nel capillare è inversamente proporzionale al raggio del capillare stesso e che dipende soprattutto dalle forze di adesione tra il liquido e le pareti del capillare, questo spiega, ad esempio, il fatto che acqua saponata e acqua pura si comportano in maniera abbastanza simile, nonostante la tensione superficiale dell'una sia circa il doppio dell'altra.

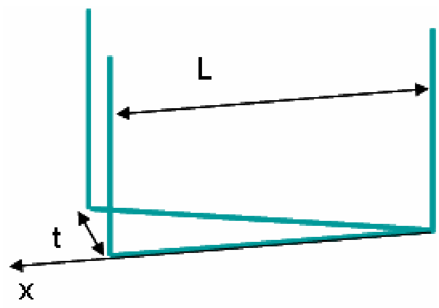
NOTA: Allo stesso risultato si può arrivare utilizzando lo schema in figura: all'equilibrio la colonna di liquido di altezza h è sostenuta dalla risultante delle forze di adesione che agiscono verso l'alto lungo il perimetro al pelo dell'acqua: $F_{ad}=2\pi r\ \gamma_{ad}$. Queste bilanciano la forza peso $F_p= mg = \rho\pi r^2 hg$ che agisce sulla colonna di acqua. Dall'eguaglianza si ottiene la formula precedente.
Inoltre la superficie dell'acqua nel capillare si incurva sotto l'effetto della tensione superficiale (anche se ad occhio nudo è difficile vederlo in un capillare sottile) e la tensione superficiale genera una pressione diretta verso il centro di curvatura della superficie (FORMULA 2):

$P = \frac{F_z}{\Sigma} = \frac{2\gamma_{H2O}}{R}$ ed essendo $r=R\sin\alpha = R\cos\theta$ si ha: $P = \frac{F_z}{\Sigma} = \frac{2\gamma_{H2O}\cos\vartheta}{r}$

è questa una pressione negativa eguale e contraria alla pressione dovuta alla colonna di acqua di altezza h ($P_o = \rho gh$). Eguagliando P e P_o ritroviamo di nuovo l'espressione precedente.

Vediamo come interpretare il fenomeno di risalita dell'acqua tra i due vetrini che abbiamo visto nel paragrafo precedente e riportato in foto nella pagina precedente. Con riferimento alla figura consideriamo la massa di acqua contenuta tra i due vetrini nel tratto d_x, quando sono distanti d: $m=\rho\ h\ d\ d_x$ dove $V=hd d_x$ il volume di acqua sollevato. Ragionando come abbiamo fatto per il capillare il sistema guadagna energia aumentando la superficie di vetro a contatto con l'acqua per effetto delle forze di adesione: per un innalzamento δz del pelo dell'acqua si ha: $\delta E_{ad}= \gamma_{ad}\ \delta\Sigma = \gamma_{ad}\ 2\ d_x\ \delta z$. Allo stesso tempo la massa di acqua si solleva anch'essa di δz con un aumento di energia potenziale: $\delta E_{pot}=\rho\ h\ d\ d_x\ g\ \delta z$. Eguagliando $\delta E_{pot}=\delta E_{ad}$ si ha $2\gamma_{ad} = \rho\ h\ d\ g$ ovvero:

$$h = \frac{2\gamma_{ad}}{g\rho d}$$



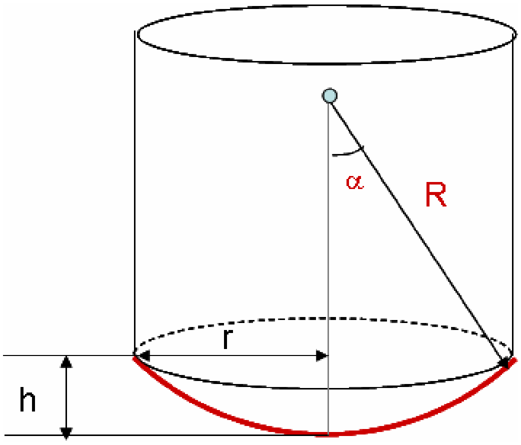
Quindi h aumenta man mano che la distanza d tra i due vetrini diminuisce. A questo punto definiamo un sistema di riferimento con l'asse x lungo la base del vetrino come in figura, con origine nel punto in cui questi si toccano: se t è la distanza massima tra i due vetrini (es. diametro dello stecchino) possiamo scrivere la distanza tra i due vetrini in funzione di x (che varia tra 0 e L): d=x t/L. sostituendo nell'ultima equazione si ha:

$$h(x) = \frac{2L\gamma_{ad}}{g\rho tx} = \frac{2L\gamma_{H2O}\cos\theta}{g\rho tx} = \frac{k}{x} \qquad \text{FORMULA 4}$$

quindi l'altezza del liquido nel vetrino è descritta matematicamente da una funzione che rappresenta un ramo di iperbole equilatera.

3. Misure sperimentali: tensione superficiale e capillarità:

Nella sezione 1 abbiamo visto che la superficie di un fluido si comporta a tutti gli effetti come una membrana elastica. Nella sezione 2 abbiamo ricavato una serie di formule che permettono di trattare l'elasticità di membrane. Ora proviamo a misurare e interpretare quantitativamente alcuni fenomeni che coinvolgono la tensione superficiale.



Esperimento 1: misura della tensione di una membrana elastica:
Abbiamo visto nel capitolo precedente che una membrana elastica genera una pressione diretta verso il suo centro di curvatura e, nell'esempio fatto del cilindro che si riempie di acqua, ci aspettiamo di vedere che la deformazione della membrana (h) sia proporzionale alla quantità di acqua sopra di essa:

$$h = r^2 \frac{\rho g H}{4\gamma}$$

Registriamo i dati h in funzione di H, per questo potete utilizzare un righello o un foglio di carta millimetrata posto dietro il cilindro. Fotografando la membrana (es. con un cellulare) si possono poi usare le foto per una determinazione più precisa delle grandezze.
Registrare i dati con una stima dell'errore. Notate che l'errore su h sarà molto più rilevante dell'errore su H

- Riportare i dati su un grafico xy (es. EXCEL, Open office)
- Verificare che aumentando la quota dell'acqua nel cilindro aumenta la deformazione h.
- Utilizzando le funzioni di Excel calcolate i coefficienti p e q della retta di regressione $h^{th} = pH + q$
- Calcolare γ della membrana utilizzando il valore trovato di p e i parametri dell'esperimento ($g=9.81\ m/s^2$, $\rho=10^3 kg/m^3$ r=raggio del cilindro)

Nota: In base alle leggi che regolano la pressione nei fluidi in stato stazionario, ci si aspetta che la deformazione sia diversa per recipienti cilindrici o per recipienti di forma diversa ma con la stessa apertura alla base?

Esperimento 2: misura della tensione superficiale dell'acqua in presenza di tensioattivi (sapone):
Se osserviamo da vicino il processo di formazione di una goccia d'acqua da un capillare sottile o da un contagocce vediamo che questa ha una forma approssimativamente sferica nella parte inferiore ma nella parte superiore si forma una strozzatura (*collo*): quando il collo si rompe la goccia si stacca, il comportamento è molto simile a quello che si osserva riempiendo un palloncino d'acqua: quando questo pesa troppo il collo si rompe e il palloncino cade.
In pratica nel caso della goccia la superficie di questa si comporta come una membrana elastica che letteralmente contiene l'acqua e non la lascia cadere. Quando la forza peso dell'acqua è maggiore della resistenza della superficie (tensione superficiale) la goccia si stacca. Al momento del distacco le forze che agiscono sulla superficie della bolla sono: la forza peso dovuta alla massa dell'acqua: $F_p = Mg$, verticale e diretta verso il basso, e la reazione della tensione superficiale.
Sul collo della goccia la forza verticale dovuta alla tensione superficiale è:

$$F_z = L\,\gamma = 2\pi r\,\gamma$$

dove $L = 2\pi r$ è la circonferenza del collo, circa eguale alla circonferenza esterna del capillare (figura).

Materiale necessario: una bilancia da laboratorio con sensibilità 0.05 g, pipette o capillari, un bicchierino di acqua pura, un bicchierino di acqua con una o due gocce di sapone per piatti. Coperchio di una capsula Petri

Misura A
1. Misurare il diametro del capillare (mm).

2. Si lasciano cadere un certo numero di gocce (N) sul piatto della bilancia fino a che si osserva un valore significativo rispetto alla sensibilità della stessa (es. 20-30 gocce nel caso di una bilancia da laboratorio). Sia M la massa totale delle N gocce. Il peso indicato dalla bilancia non è costante ma i valori oscilleranno (tipicamente sull'ultima cifra) per effetto delle correnti d'aria, vibrazioni del banco etc... considerate l'ampiezza della variazione come l'errore sperimentale su M: σ_M.

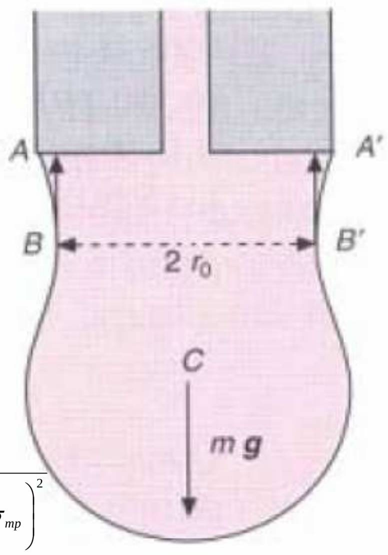
3. Si calcola la massa media di una goccia $m = M/N$ con errore: $\sigma_m = \sigma_M/N$

4. Sapendo che $\gamma_{H2O} = 0.073$ [N m^{-1}] è la tensione superficiale dell'acqua, verificate che sia valida l'equazione: $2\pi r\,\gamma = mg$

Misura B
1. Utilizzando due capillari eguali misurate il peso di N gocce di acqua pura (M_p) e N gocce di acqua saponata (M_s) come descritto nell'esperimento precedente.
2. Ci sono differenze tra M_p e M_s ?
3. Calcolate la massa media delle gocce di acqua (pura e saponata): $m_p = M_p/N$; $m_s = M_s/N$ e gli errori σ_{mp} e σ_{ms}
4: indicando con γ_p e γ_s la tensione superficiale dell'acqua pura e dell'acqua saponata posso scrivere il sistema delle due equazioni seguenti:

$$2\pi r\,\gamma_p = m_p\,g$$
$$2\pi r\,\gamma_s = m_s\,g$$

che risolto permette di calcolare la tensione superficiale dell'acqua saponata nota $\gamma_{H2O} = 0.073$ [N m^{-1}]:
$\gamma_s = \gamma\, m_s / m_p$

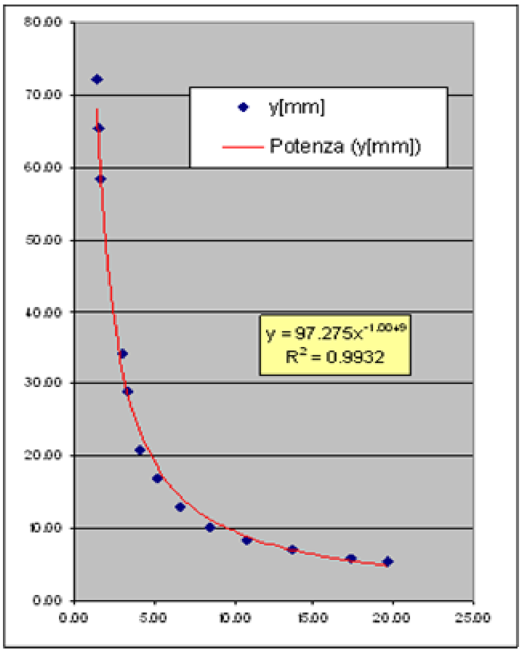


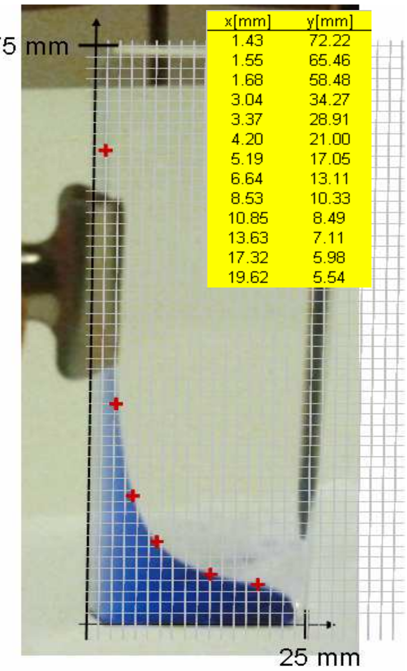
Nota: L'errore sperimentale su γ_s si calcola:

$$\sigma(\gamma_s) = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{m_p}\sigma_{ms}\right)^2 + \left(\frac{\gamma m_{ms}}{m_p^2}\sigma_{mp}\right)^2}$$

Esperimento 3 misure di capillarità:

Utilizziamo i due vetrini usati per l'osservazione 5: misuriamone le dimensioni e facciamo una foto per registrare la forma del liquido tra i due vetrini. Stampiamo la foto o la importiamo in un file Office, definiamo un sistema di riferimento come in figura e misuriamo le coordinate di alcuni dei punti della curva. Inseriamo i punti in un foglio Excel e utilizzando la funzione "linea di tendenza-potenza" si calcola la funzione che meglio approssima i dati sperimentali. Si dovrebbe ottenere un esponente prossimo ad 1, come previsto dalla teoria (FORMULA 4)

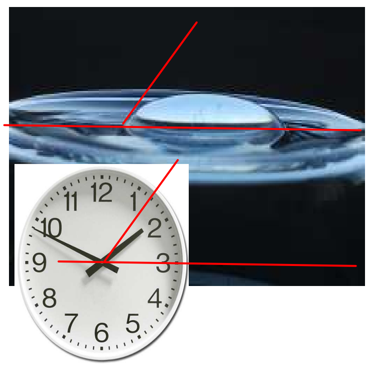




x[mm]	y[mm]
1.43	72.22
1.55	65.46
1.68	58.48
3.04	34.27
3.37	28.91
4.20	21.00
5.19	17.05
6.64	13.11
8.53	10.33
10.85	8.49
13.63	7.11
17.32	5.98
19.62	5.54

Attenzione: i valori trovati possono essere anche molto diversi, influenzati dalla pulizia dei vetrini, dalla purezza dell'acqua etc...

Nell'esempio illustrato ho usato uno stecchino di diametro t=2.5 mm, due vetrini di larghezza L =25mm. Usando la FORMULA 4 alla fine del capitolo precedente:



$$h(x) = \frac{2L\gamma_{ad}}{g\rho t x} = \frac{2L\gamma_{H2O}\cos\theta}{g\rho t x} = \frac{k}{x}$$

si vede che l'altezza del liquido deve seguire una curva iperbolica. In effetti la curva di regressione in figura mostra l'esponente della x=-1.0049 quindi in accordo con la teoria.

Il valore di k trovato da me è k=97.3 mm^2

Usando come paramteri:

– γ_{H2O} = 0.073 [N m^{-1}]

- g=9.81 m s^{-2}

- t=2.5 mm

- L=25 mm

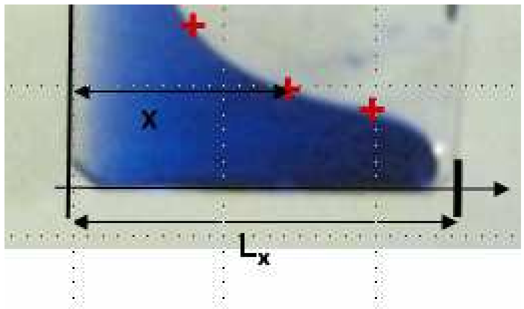
– ρ=1 g cm^{-3}

si ottiene:

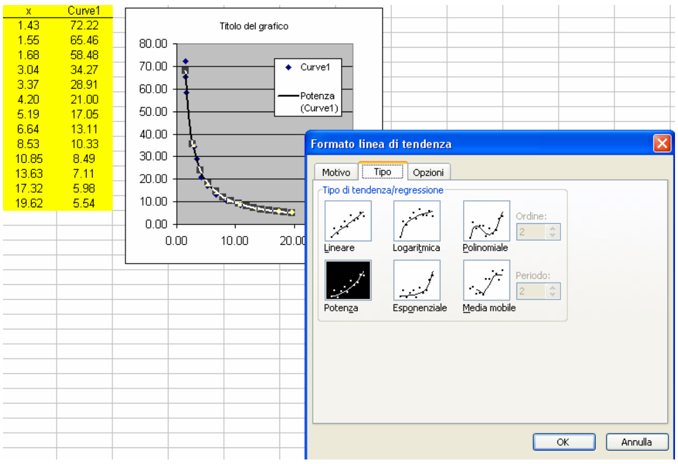
$$h(x) = \frac{2L\gamma_{H2O}\cos\theta}{g\rho t x} = \frac{140\cos\theta}{x}$$

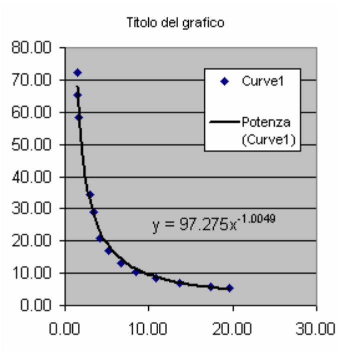
abbiamo quindi θ ~ 46^0 e quindi la tensione dovuta alle forze di adesione tra acqua e vetro è γ_{ad}=0.073 cos θ ~ 0.05 [N m^{-1}]

Nota: operazioni da fare per riprodurre la curva con Excel:
1) importare la foto dei vetrini in powerpoint.
2) Utilizzare le opzioni di disegno per visualizzare la griglia (oppure stampare la foro e utilizzare un righello) in modo da misurare alcuni punti (almeno 6-7) sulla curva.



3) Conoscendo la dimensione reale in mm dei vetrini si dalle misure sulla foto si ricavano i valori in mm: es se la base dei vetrini L_x=25mm siano x e L_x i valori misurati dalla foto, l'ascissa in mm è: I valori in mm si ottengono x[mm] = 25 x/L_x
3) Preparare una tabella EXCEL come quella in figura con i valori x e y in mm.
4) Riportare su un grafico a dispersione (xy) i dati
5) Selezionare un punto sul grafico e usando il tasto destro del mouse scegliere l'opzione: linea di tendenza->potenza
6) Dalle opzioni della linea di tendenza scegliere di visualizzare l'equazione sul grafico in modo da verificare l'andamento iperbolico della curva (esponente della x~ -1)





Esperimento 4: tensione superficiale su una bolla d'acqua

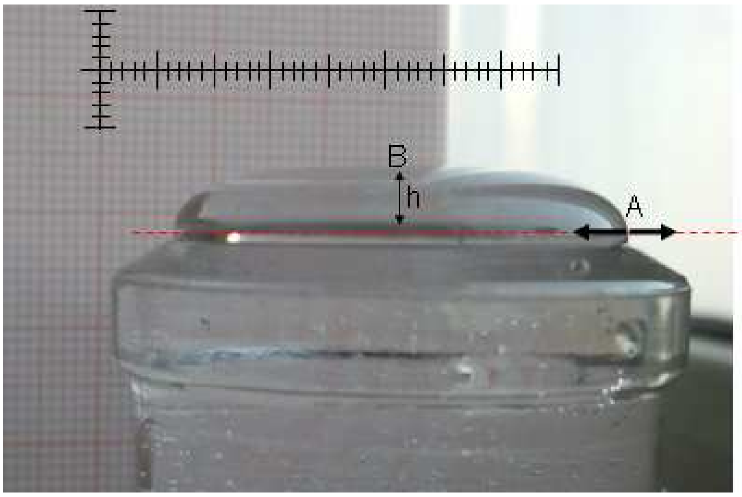
Abbiamo visto che è possibile riempire un recipiente di liquido fino a che questo supera l'orlo del recipiente. Fino a che altezza oltre l'orlo possiamo arrivare?

Fotografiamo una bolla d'acqua come quella in figura mettendo dietro un foglio di carta millimetra. Importiamo la foto in un programma che ci permetta di fare un po' di trattamento delle immagini (power point, ad esempio) e disegniamo una scala per avere un riferimento per le lunghezze in orizzontale e verticale.

Nel punto A, dove la superficie della bolla è verticale, le forze che agiscono sono le forze di pressione del fluido (verso l'esterno) bilanciate dalle forze dovute alla tensione superficiale, verso l'interno.

Osserviamo che al centro della bolla, in B, la superficie è praticamente piatta (o di raggio di curvatura molto grande) quindi posso trascurare l'effetto della tensione superficiale e assumere che muovendoci sulla verticale di B, fino all'altezza di A, la pressione si abbia un aumento di pressione dovuto alla sola colonna di acqua di altezza h, ovvero (legge di Stevino) $\Delta P = \rho g h$.

La pressione del fluido deve essere la stessa su tutta la superficie orizzontale alla quota di A, quindi, in A la pressione verso l'esterno è proprio $\rho g h$ e deve essere bilanciata dalla pressione generata dalla tensione superficiale. Sul bordo della bolla abbiamo due raggi di curvatura: orizzontale R_o è il raggio dell'apertura della bottiglia, nel caso in figura R_o=19mm, mentre R_v è il raggio di curvatura della superficie nel piano verticale che possiamo stimare disegnando un cerchietto vicino al bordo e misurando poi il raggio con la scala che abbiamo disegnato. Dalla figura R_v~2 mm



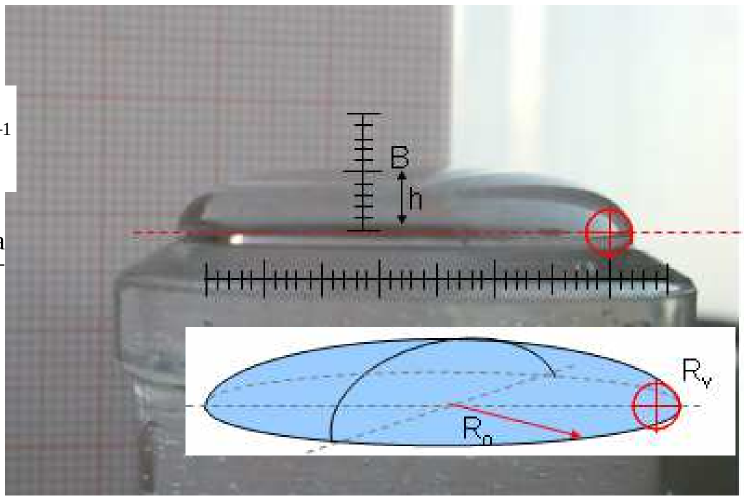
La pressione dovuta alle forze di tensione è: F_z/Σ ovvero:

$$P_T \cong \gamma\left(\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R_O}\right)$$

quindi, eguagliando $\Delta P = P_T$ abbiamo:

$$\rho g h \cong \gamma\left(\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R_O}\right)$$

ora g=9,.81 [ms^{-2}], $\rho=10^3$ [Kg m^{-3}], Essendo h~5 mm, e usando i valori trovato per R_V e R_O abbiamo:



$$\gamma = \rho g h\left(\frac{1}{R_V}+\frac{1}{R_O}\right)^{-1} \sim 0.089\,Nm^{-1}$$

in ragionevole accordo con il valore della tensione superficiale dell'acqua (0.073 N m^{-1}).

Valutare gli errori di misura.