Il paradosso non paradosso di Banach Tarski

Paola D'Aquino
Università della Campania L. Vanvitelli

$P \subset IN$ e sono in corrispondenza biunivoca.

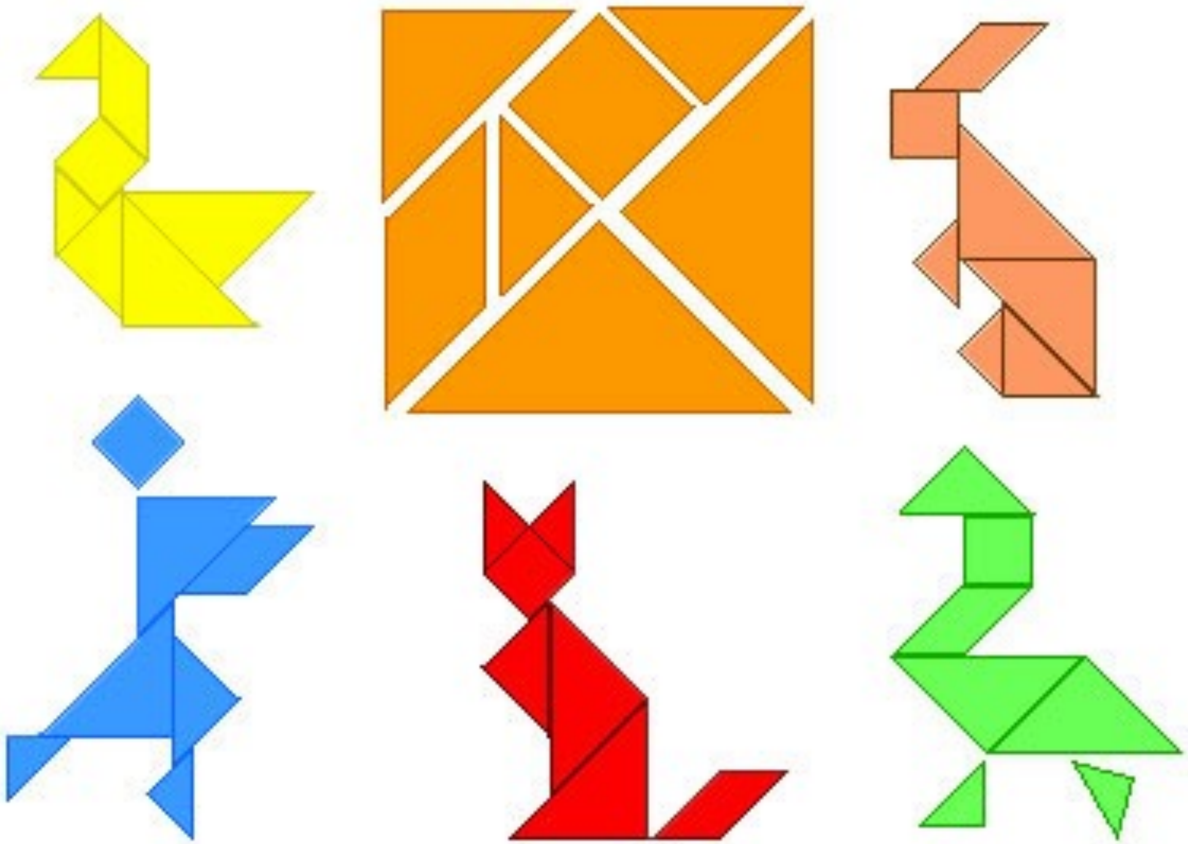
$$
\begin{array}{lllllll l}
0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \ldots\ldots & = \text{Pari} = P \\
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots\ldots & = IN \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \ldots\ldots & = \text{Quadrati} = Q
\end{array}
$$

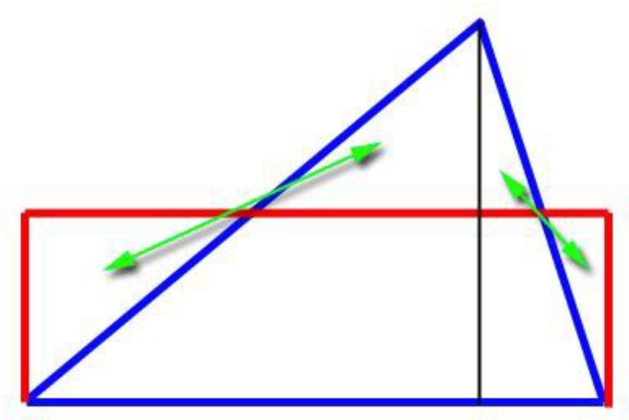
$Q \subset IN$ e sono in corrispondenza biunivoca.

DISSEZIONE E RICOMPOSIZIONE

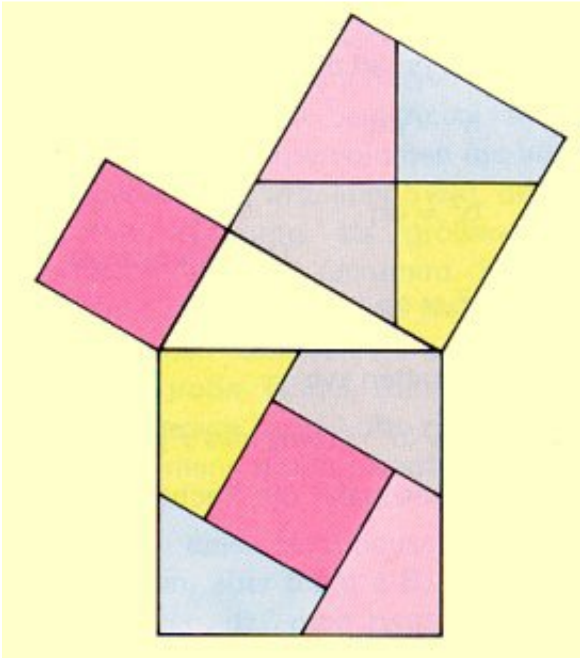
Definizione. Due poligoni sono congruenti per *dissezioni* (o equiscomponibili) se uno può essere decomposto in un numero finito di poligoni che poi ricomposti (senza alterarli) danno l’altro poligono.

Questo metodo era stato usato già dai greci per calcolare le aree di poligoni

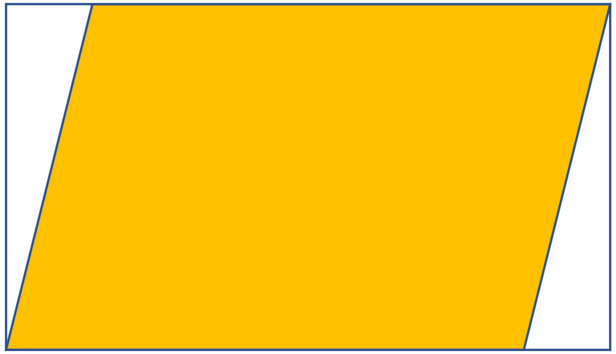




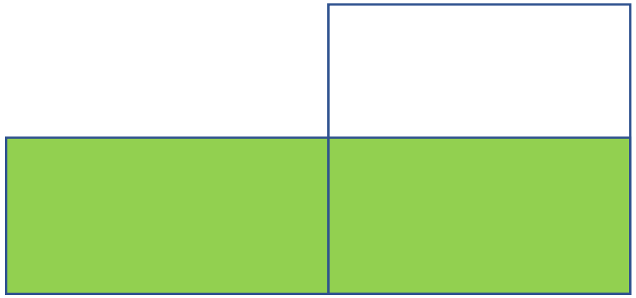
Il triangolo blu ha altezza h e base l ed ha la stessa area del rettangolo rosso di altezza $\frac{h}{2}$ e base l



Dimostrazione del teorema di Pitagora con dissezioni (dovuta a Henry Perigal 1801-1898)



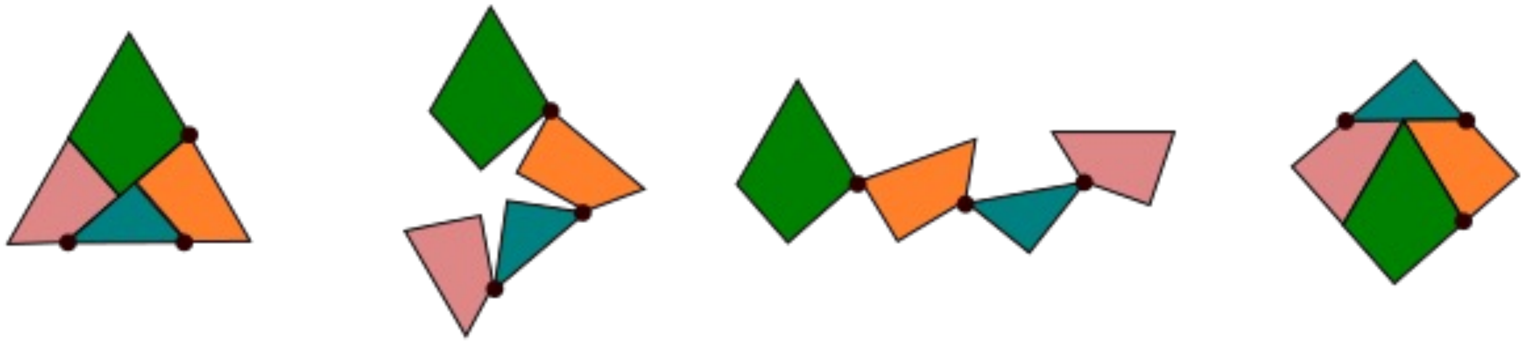
Parallelogramma congruente per dissezioni
a rettangolo



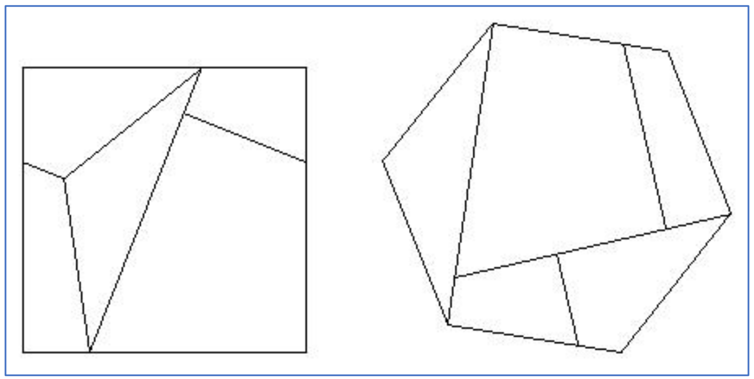
Rettangolo congruente per dissezioni ad un
quadrato

Più in generale si può dimostrare che ogni poligono è congruente per dissezioni ad un quadrato

Dudeney in 1903 ha determinato il minimo numero di pezzi 4 in cui dividere un triangolo equilatero per ottenere un quadrato



Numero minimo di pezzi è 5 per passare da esagono a quadrato



Per transitività un triangolo e un esagono di stessa area sono equivalenti per dissezioni

Due poligoni sono congruenti per dissezioni (equiscomponibili) se e soltanto se hanno la stessa area.

$\Rightarrow$ Chiaro

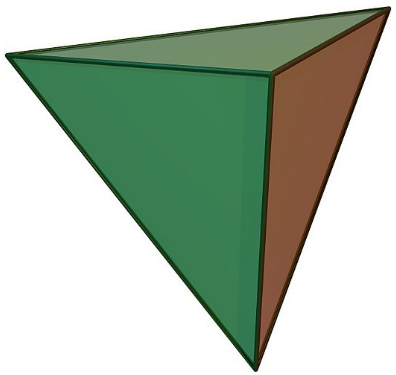
$\Leftarrow$ La relazione di congruenza per dissezioni è di equivalenza.

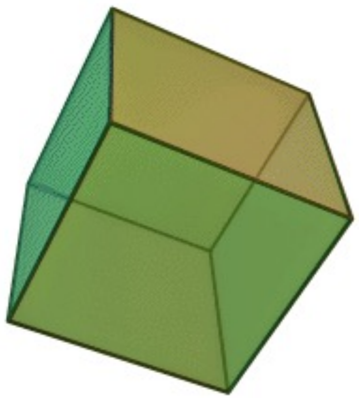
Ogni poligono è congruente per dissezioni ad un quadrato.

Nota. In effetti si possono utilizzare solo traslazioni!!

3° Problema di Hilbert: Dati due poliedri regolari dello stesso volume è possibile dividerli nello stesso numero finito di poliedri più piccoli ?? NO

Dehn 1902: non è possibile decomporre un cubo in un numero finito di poliedri che una volta ricomposti formano un tetraedro





Teorema di Banach Tarski:

Possiamo suddividere una sfera nello spazio in un numero finito di parti e riassemblare i pezzi in due sfere con stesso raggio della sfera iniziale.

1 + 1 = 1

MISURA

E' una funzione m : $\wp(\mathrm{IR}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ che associa ad ogni insieme un reale positivo e che soddisfa alcune proprietà tra cui:

1. $m(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots) = m(A_0) + m(A_0) + m(A_0) + \ldots\ldots$

2. $m(\theta A) = m(A)$ dove $\theta: \mathrm{IR}^n \rightarrow \mathrm{IR}^n$ è un'isometria cioè conserva le distanze, quindi invariante per rotazioni e traslazioni

ESEMPI:

In R lunghezza di segmenti

In R^2 area dei poligoni

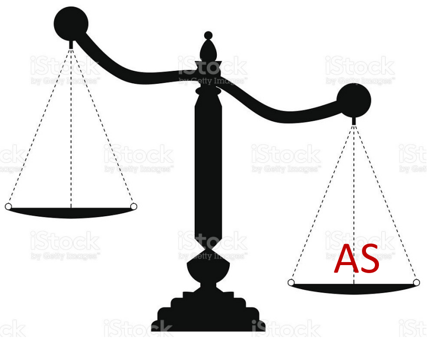
In R^3 volumi dei solidi

In effetti una tale funzione definita su IR^n non esiste, non tutti i sottoinsiemi sono misurabili.

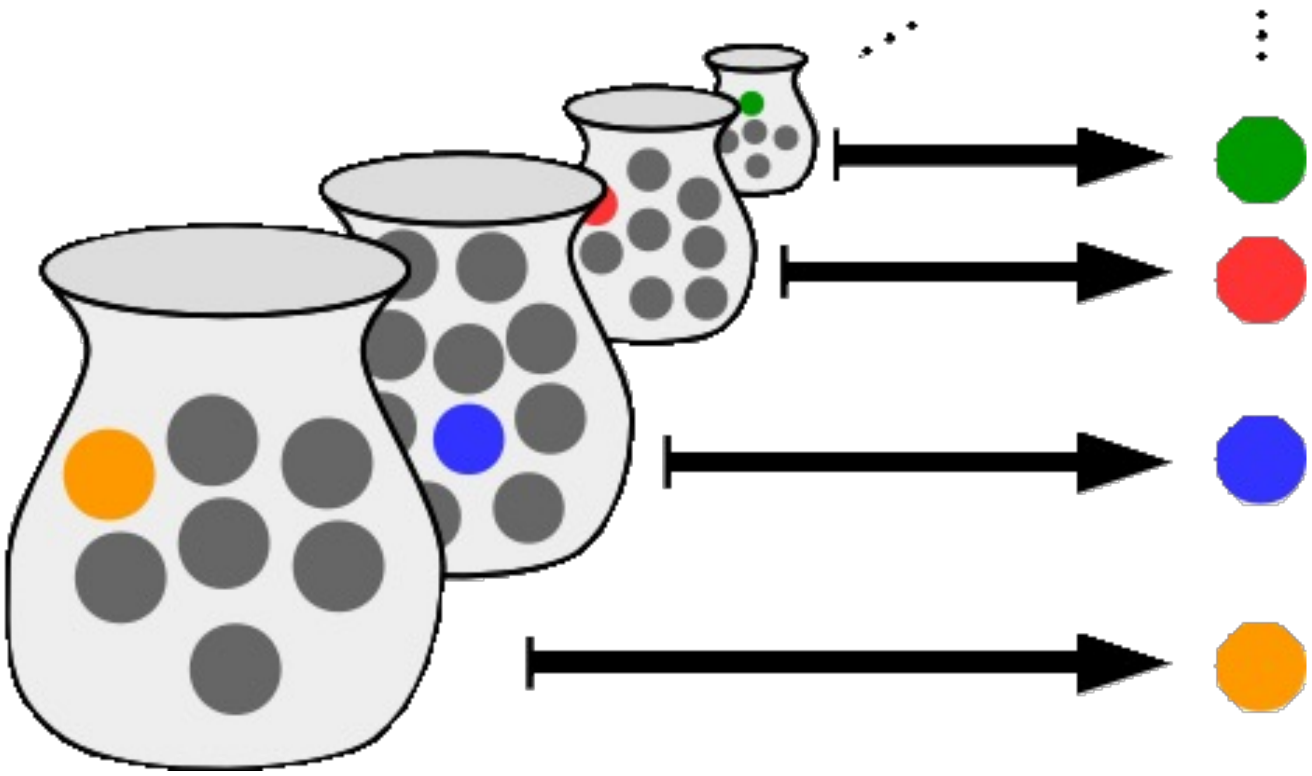
Questo è conseguenza dell'assioma di scelta

E' stato dimostrato che senza l'assioma della scelta tutti i sottoinsiemi di IR^n hanno una misura.

L'assioma della scelta è fondamentale in tantissimi altri contesti matematici, quindi lo teniamo anche se pone qualche problema



ASSIOMA DELLA SCELTA



Scegliamo tutte le scarpe destre

Quale scegliere??

INSIEME DI VITALI: V non è misurabile

Su $[0,1]$ definiamo la relazione $x \sim y$ se $x - y$ è razionale

$\sim$ è una relazione di equivalenza

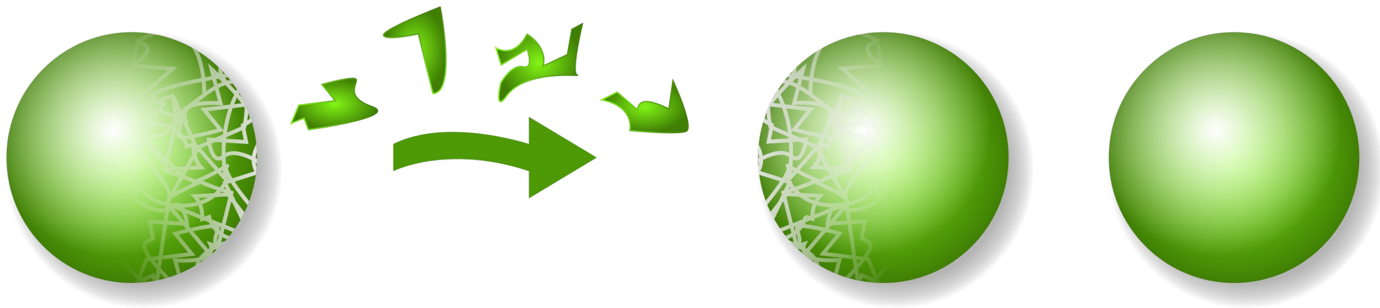
Classe di equivalenza $[x]=\{ y \in [0,1] : x - y \text{ è razionale}\}$

Se $[x] \neq [z]$ allora $[x] \cap [z] = \emptyset$

Con assioma di scelta prendiamo un elemento da ogni classe e questo è l'insieme V di Vitali. V non ha una misura.

Questo risultato si può generalizzare anche a $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$

Paradosso di Banach Tarski:



E’ stato dimostrato per la prima volta da Banach e Tarski nel 1924. Viene utilizzato l’assioma di scelta.

Sappiamo che è sufficiente dividere la sfera in 5 pezzi e questi pezzi sono complicati non riusciamo a visualizzarli, alcuni non hanno volume

$A = IN$ e $B = Z$ = interi

$A = P \cup D$ dove P insieme dei pari e D insieme dei dispari

$B = IN \cup Z^-$

P è biettivo con IN via $2n \to n$

D è biettivo con Z^- via $m \to -\frac{m+1}{2}$

Il Teorema di Banach-Tarski implica che un cubo può essere suddiviso in pezzi e questi riassemblati formano un tetraedo dello stesso volume

Nel 1925 Tarski pose il problema: Dato un cerchio in un piano è equiscomponibile con una quadrato avente stessa area? (Il problema della quadratura del cerchio!)

Nel 1990 Laczkovich ha dimostrato di si utilizzando solo traslazioni. Alcuni insiemi in cui viene decomposto il cerchio non sono misurabili, quindi nessuna contraddizione con Quanto dimostrato dai greci!